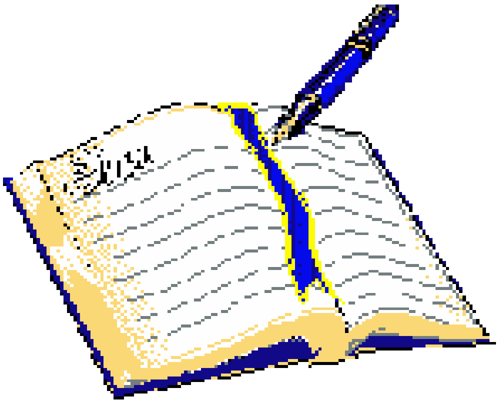
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РБ
ГБПОУ «БУРЯТСКИЙ ЛЕСОПРОМЫШЛЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ»
Учебно-методический комплекс дисциплины



МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

для студентов 2 курса специальности
08.02.11 Управление, эксплуатация и обслуживание многоквартирного дома

2018г.

ББК
М 34

Математика. Методические указания к выполнению самостоятельной работы для студентов 2 курса специальности: Управление, эксплуатация и обслуживание многоквартирного дома– Улан-Удэ: БЛПК, 2018. - 43с.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом БЛПК в качестве сборника заданий для самостоятельных работ студентов 2 курса

Пособие предназначено для студентов 2 курса. Пособие содержит самостоятельные работы по темам: «Предел функции», «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей», «Численное интегрирование и дифференцирование» и методические указания к их выполнению. Самостоятельные работы составлены в нескольких вариантах одинакового уровня сложности. Задания самостоятельных работ отвечают уровню требований ФГОС СПО к математической подготовке студентов специальности: 080211 Управление, эксплуатация и обслуживание многоквартирного дома

Авторы: Намдакова Н.П.,Домиева Н.Ф., преподаватели математики БЛПК

Рецензенты: Манзарова Т.Г., преподаватель математики БЛПК
Баргуев С.Б., к.ф.-м.н., зав.каф. высшей математики и общепроф. дисциплин БИИК СибГУТИ

Оглавление

Введение

Тенденция усиления фактора самостоятельной работы в организации занятий студентов требует методического руководства при изучении дисциплины. Знания и навыки, полученные во время аудиторных занятий, закрепляются в ходе выполнения самостоятельной работы. Цели СРС – формирование у студентов навыков к самостоятельному творческому труду, умения решать профессиональные задачи с использованием всего арсенала современных средств, потребности к непрерывному самообразованию и совершенствованию своих знаний; приобретение опыта планирования и организации рабочего времени и расширение кругозора.

Планирование, организация, контроль и анализ СРС являются необходимыми составляющими научной организации учебного процесса, позволяющими обеспечить полноценное управление и необходимую эффективность учебной работы.

Предлагаемые методические указания составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» для студентов 2 курса и государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям среднего профессионального образования.

Цель данного пособия – помочь студентам применять полученные ими теоретические знания при решении задач по всем разделам курса математики во время аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы.

Аудиторная самостоятельная работа по математике выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

В данном пособии представлены: задания для текущего контроля знаний, умений (краткий справочный материал по темам курса, основные формулы и алгоритмы решения задач, примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы студентов), а также задания для закрепления и систематизации знаний (тематика рефератов, сообщений, составление кроссвордов, ребусов). Задания подобраны с учетом компетентностного подхода в обучении математике и направлены на формирование таких компетенций будущего специалиста, как:

- ценностно-смысловые компетенции;
- компетенции самосовершенствования, саморазвития, личностной и предметной рефлексии;
- компетенции познавательной деятельности: постановка и решение познавательных задач; нестандартные решения, исследование;

- компетенции деятельности: игра, учение, прогнозирование, иссле-довательская деятельность, ориентация в разных видах деятельности и т.д.

Требования к выполнению и оформлению самостоятельных работ:

- самостоятельную работу следует выполнять в тетради для самостоятельных работ, тетрадь должна быть подписана, каждая работа должна быть озаглавлена, проставлена дата выполнения работы;
- решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, сохраняя номера задач;
- перед решением задачи нужно выписать полностью ее условие;
- решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

Критерии оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность общеучебных умений;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

Контроль выполненной самостоятельной работы осуществляется индивидуально, на уроке, при тестировании, на семинаре, при защите рефератов:

- Контроль сообщений осуществляется на уроках.
- Контроль выполнения рефератов осуществляется индивидуальной (или групповой) беседой по ключевым моментам работы, с последующей защитой реферата.

Роль математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин.
Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. **Заполнить терминологический словарь.**
2. **Подготовить реферат на одну из тем:**
   - История возникновения, развития и становления математики
   - Из истории понятия функции
   - Лагранж Ж.Л.
   - Леонард Эйлер
   - Исаак Ньютон
   - Лейбниц Г.В.
   - Рене Декарт
   - Из истории дифференциального исчисления.
   - Гаусс К.Ф.
   - О.Л. Коши
   - Архимед
3. **Составить кроссворд (используя основные понятия математики).**

Тема 1. Пределы . Дифференциальное и интегральное исчисление.
Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Выполнение заданий
3. Подготовка отчетов

Пределы

Число b называется *пределом* функции f(x) в точке a, если для всех значений x, достаточно близких к a и отличных от a, значение функции f(x) сколь угодно мало отличаются от числа b. Записывают так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Теорема о единственности предела: Функция не может иметь двух разных пределов в точке.

Основные теоремы о пределах:

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух, трех и вообще определенного конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций: $\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k$, если пределы последних существуют.

Теорема 2. Предел произведения двух, трех и вообще определенного числа функций равен произведению пределов этих функций $\lim(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k$, если последние существуют.

Теорема 3. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Теорема 4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля: $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, если $\lim v \neq 0$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 7}(x + 3) = \lim\limits_{x\to 7} x + \lim\limits_{x\to 7} 3 = 7 + 3 = 10.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 2} 5x^3 = 5\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}(-7)}=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x+2}{2\lim\limits_{x\to 1}x-7}=\frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=\frac{5}{-5}=-1.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+4x-3}{x+4}$. При x = 1 дробь $\frac{2x^3+4x-3}{x+4}$ определена, т.к. ее знаменатель отличен от нуля. Поэтому для вычисления предела достаточно заменить аргумент его предельным значением. Тогда получим $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+4x-3}{x+4}=\frac{2\cdot 1^3+4\cdot 1-3}{1+4}=\frac{3}{5}$.

Подобным способом нельзя пользоваться в следующих случаях:

1) если функция при x = a не определена;
2) если знаменатель дроби при подстановке x = a оказывается равным нулю;
3) если числитель и знаменатель дроби при подстановке x = a одновременно оказываются равными нулю или бесконечности.

В таких случаях пределы функций находят с помощью различных искусственных приемов.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$. Здесь непосредственный переход к пределу невозможен, т.к. предел делителя равен нулю: $\lim\limits_{x\to 3}$ (x – 3) = 3 – 3 = 0. Предел делимого также равен 0: $\lim\limits_{x\to 3}$ (x^2 – 9) = 9 – 9 = 0. Значит, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для нахождения предела нужно преобразовать функцию с помощью формулы разности квадратов и разделив числитель и знаменатель на выражение x – 3: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$.

Определения. 1) Число A называется *пределом функции* f(x) на бесконечности (или при x, стремящемся к бесконечности), если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x соответствующие значения функции f(x) сколь угодно мало отличаются от числа A.

2) Функция f(x) называется *бесконечно малой* при x → a или при x → ∞, если $\lim\limits_{x\to a}$ f(x) = 0 или $\lim\limits_{x\to\infty}$ f(x) = 0.

3) Функция f(x) называется *бесконечно большой* при x → a, если $\lim\limits_{x\to a}$ f(x) = ∞.

Справедливы следующие *утверждения:* Если f(x) стремится к нулю при x → a (или при x → ∞) и не обращается в нуль, то y = 1/f(x) стремится к бесконечности и наоборот, если f(x) стремится к ∞ при x → a (или при x → ∞), то y = 1/f(x) стремится к 0.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+0=1.$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+5}$. При x → ∞ знаменатель x + 5 также стремится к бесконечности, а обратная ему величина $\frac{1}{x+5}\to 0$. Следовательно, произведение $\frac{1}{x+5}\cdot 3=\frac{3}{x+5}$ стремится к нулю, если x → ∞. Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+5}=0$.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^3-1}$. Здесь числитель и знаменатель не имеют предела, т.к. оба неограниченно возрастают. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель почленно на x^3 (наивысшую степень x в данной дроби): $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}=2$, т.к. $1/x^2$ и $1/x^3$ при $x\to\infty$ стремятся к нулю.

Пример 9. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$. Непосредственная подстановка x = -2 показывает, что имеет место неопределенность вида 0/0. Разложив числитель на множители и сократив дробь, находим $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2(x+2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+3}{x+2}=\infty$.

Пример 10. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$. Непосредственная подстановка дает неопределенность вида $\infty-\infty$. Поступают следующим образом: умножают и делят на выражение, сопряженное данному $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1}$$

Это *первый замечательный предел*, который служит для раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$.

Примеры 11- 16:

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot1=1$

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot1=5$

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2\cos^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{x\cdot x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$

$==\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{4}$

14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=1\cdot0=0$

15) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-4}{\sin(x-2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{\sin(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$

16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{\sin 4x(1+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 4x(1+\sqrt{1-x})}=$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sin 4x\cdot4\cdot(1+\sqrt{1-x})}==\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{4(1+\sqrt{1-x})}=\dfrac{1}{8}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

Это второй замечательный предел, который служит для раскрытия неопределенности 1^{∞}. Обращаем внимание на то, что в формуле для второго замечательного предела в показателе степени должно стоять выражение, обратное тому, которое прибавляется к 1 в основании.

Примеры 17- 23:

17) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot 1 = e$

18) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{3} = e^{3}$

19) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2} = e^{2}$

20) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$

21) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1} = \left[1^{\infty}\right] =$

$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e\cdot e\cdot 1 = e^{2}$

22) $\lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 2}(1+2x-4)^{\frac{1}{2x-4}\cdot\frac{2x-4}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{2(x-2)}{x-2}} = e^{2}$

23) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{4(x+3)}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4x+12}{x-1}} = e^{4}$

Задания для самостоятельной работы

Найдите пределы:

Вариант 1.

1. $\lim_{x\to 2}(\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x} + 6)$ 2. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$ 4. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x}$ 6. $\lim_{x\to\infty}\frac{10-3x^2}{7+2x^2}$ 7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ 8. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

9. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x}$ 10. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{4}{x}}$

Вариант 2

Найдите пределы:

1. $\lim_{x\to 4}(\mathrm{x}^4 - 2\mathrm{x} + 5)$ 2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ 4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{p+x}-\sqrt{p-x}}{x}$

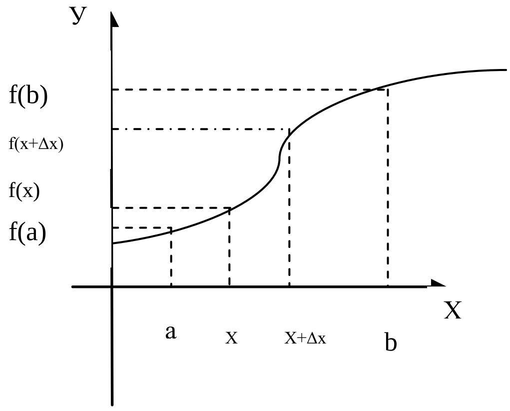
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{7}{2x^2+x}$ 6. $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+3x-1}{x^2}$ 7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$ 8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}$

Дифференциальное исчисление. Производная функции

Определение производной, ее физический и геометрический смысл

Пусть y=f (x) – непрерывная функция, определенная на интервале (a; b).
Δx – приращение аргумента;
Δy=f(x+Δx)-f(x) – приращение функции в точке x.



Производной функции y=f (x) в точке x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.
Обозначение: y' или f' (x).

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

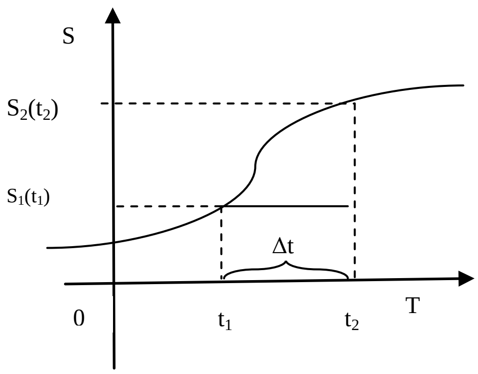
Функция, имеющая производную в точке x, называется *дифференцируемой* в этой точке; операция нахождения производной называется *дифференцированием*. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется дифференцируемой на этом интервале.

Пример. Функция f (x)=x дифференцируема при x R, и

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Физический смысл производной

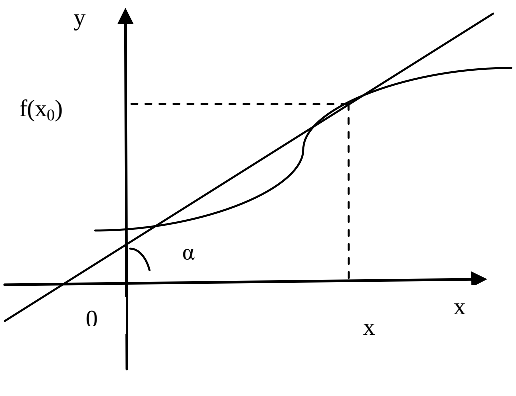
Пусть точка движется прямолинейно по закону S=S(t), где S – перемещение точки за время t.



$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_1+\Delta t)-S(t_1)}{\Delta t}$ -средняя скорость точки за промежуток времени $[t_1;t_2]$

Мгновенная скорость точки в данный момент времени t, равна значению производной от закона движения: $v(t) = S'(t)$.

Такие величины, как перемещение, скорость и ускорение, при движении точки связаны между собой. $a(t) = v'(t) = (S'(t))' = S''(t)$ (Производную от производной называют производной второго порядка или второй производной).



Геометрический смысл производной

Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$

$k = tga = f'(x_0)$

k – угловой коэффициент касательной.

Уравнение касательной к графику y=f(x), проведенной в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$, имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Таблица производных элементарных функций

Функция	*Производная*
c(const)	0
x	1
kx+b	k
x^n, n≠1, n∈R	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила вычисления производных функций (правила дифференцирования):

1. Производная суммы равна сумме производных: $(u + v)' = u' + v'$
2. Производная произведения: $(uv)' = u'v + uv'$
3. Постоянный множитель выносится за знак производной: $(Cu)' = Cu'$
4. Производная частного функций: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Определение: Функция называется *сложной* от переменной x, если зависимость y от x может быть представлена в виде y = f(u), u = g(x), где область определения функции g(x) принадлежит области определения функции f(u). При этом u называется промежуточным аргументом.

Пример. а) $y = (x^2 - 4)^{25}$ $\quad y = u^{25}$, $u = x^2 - 4$ $\qquad$ б) y = sin6x $\quad$ y = sinu, u = 6x

Правило дифференцирования сложной функции: Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Таблица производных сложных функций:

Функция	*Производная*
u^n	$nu^{n-1}\cdot u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}\cdot u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
a^u	$a^u\ln a\cdot u'$
e^u	$e^u\cdot u'$
$\log_a u$	$\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
lnu	$\frac{1}{u}\cdot u'$
$\sin u$	$\cos u\cdot u'$

Cosu	$-\sin u\cdot u'$
tgu	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
ctgu	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
arccos*u*	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
arctgu	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
arcctgu	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Задания для самостоятельной работы

Производная элементарной функции

В.1

1. Найдите производную функции: а) $y = x^5 - 2\sqrt{x}$ б) $y = \frac{x^2-3}{x^2+3}$

в) $y = \log_5 x + \sin x$

2. Вычислите производные функции $y = 3x – 4x^3$ в точках 1; 5; x + 2.

В.2

1. Найдите производную функции: а) $y = 2x^7 + 4\sqrt{x}$ б) $y = \frac{x^2+1}{x^2-3}$

в) $y = e^x + \cos x$

2. Вычислите производные функции $y = 2x^2 + x^3$ в точках 2; 4; x - 3.

В.3

1. Найдите производную функции: а) $y = (x – 4)(3x^3 – 5x)$

б) $y = 5x^2 – 4x + 7$ в) $y = 3^x - \ln x$

2. Вычислите производные функции y = (3 + 2x)(2x – 3) в точках 2; 0,25.

В.4

1. Найдите производную функции: а) $y = 2 + 3\sin x – 4x^5$ б) $y = \sqrt{x}\,(2x - 6)$

в) $y = 3e^x – \log_2 x$

2. Вычислите производные функции y = (1 + 2x)(2x – 1) в точках 4; 0,5.

Производная сложной функции

Найти производные сложных функций:

В.1	**В.2**	**В.3**	**В.4**
1) $y = (4 - 3x)^{100}$	1) $y = (2x^3 + 3)^2$	1) y = sin4x + tg2x	1) $y = (x^4 – 3x + 5)^{15}$
2) $y = \sqrt{x^2+1}$	2) $y = \sqrt{3-6x}$	2) $y = (3x^6 – 2x +7)^{34}$	2) $y = \sqrt{3x^2-4x}$
3) y = sin2x – cos2x	3) y = tg3x	3) $y = \sqrt{4x+7}$	3) $y = tg12x + x^5$
4) $y = \sin^2 x$	4) $y = \cos^3 x$	4) $y = tg^3 x$	4) $y = \sin^2(5x-3)$
5) $y = \log_3 4x$	5) $y = lg(6x^2 – 2)$	5) $y = \log_4 (3x – 5)$	5) y = lg(4-9x)
6) $y = \ln(x^3 – 4)$	6) $y = \log_7 5x$	6) $y = \ln^2 x$	6) $y = \ln(4x^5 – x^2)$
7) $y = 5^{3x-4}$	7) $y = 3^{8x}$	7) $y = 2^{3x+5}$	7) $y = 2\cdot 4^{7x}$
8) y = arcsin(5x – 2)	8) y = arccos7x	8) $y = e^{8x} -3x$	8) y = arcos(3x – 8)
9) $y = e^{3x}$	9) $y = e^{2x} + 3$	9) $y = arctg^2 x$	9) $y = e^{9 - 13x} + \sin x$
10) $y = \cos(x^2 – 6x)$	10) $y = \sin(4x^5 + 8x)$	10) $y = \cos x^3$	10) $y = \sin x^4$

Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл

Определение: Функция F(x) называется *первообразной* для функции f(x) на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Основное свойство первообразных: Если функция F(x) является первообразной для функции f(x) на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции f на этом промежутке задается формулой $F(x) + C$, $C \in R$.

Определение: Множество всех первообразных функции f(x) на некотором промежутке называется *неопределенным интегралом* от функции f(x) на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Этот символ читается так: «интеграл от f(x) по dx».

Таким образом, согласно определению, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где F(x) – какая-либо первообразная функции f(x), а C – произвольная постоянная.

Символ $\int$ называется знаком интеграла, f(x) – подынтегральной функцией, f(x)dx – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Нахождение функции по ее производной называется интегрированием функции. Интегрирование – действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования можно проверить дифференцированием.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b)$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$, C – постоянная
2. $\int kdx = kx + C$
3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$
10. $\int e^x dx = e^x + C$
11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$
15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\mathrm{arcctg}x + C$
16. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

Методы интегрирования

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путем применения к ним основных свойств неопределенных интегралов. При этом подынтегральную функцию обычно предварительно соответствующим образом преобразуют.

Способ подстановки заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Правило интегрирования способом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Пример 1. Найти $\int (1+\sqrt{x}\ )^2\,dx$.

Преобразовав подынтегральную функцию и воспользовавшись свойствами 3 и 4 интеграла, находим:

$$\int (1+\sqrt{x}\ )^2\,dx = \int (1+2\sqrt{x}+x)\,dx = \int dx + 2\int \sqrt{x}\,dx + \int x\,dx = x + \frac{4x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

Пример 2. Найти $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$.

Т.к. $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, то $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Т.к. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$.

Таким образом, интеграл сводится к табличным интегралам:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x + C.$$

Пример 4. $\int (2x+3)^4 dx$

Решение. $\int (2x+3)^4 dx = \left| \begin{array}{l} z = 2x+3 \\ dz = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int z^4 dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5} + C = \frac{(2x+3)^5}{10} + C.$

Пример 5. Найти $\int \sin x \cos^7 x\,dx$.

Положим $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\,dx$. Следовательно, $\int \sin x\cos^7 x\,dx = = -\int t^7\,dt = -\frac{t^8}{8} + C$ $= -\frac{\cos^8 x}{8} + C$

Пример 6. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{array} \right| = 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$

Определенный интеграл

Определение: Если F(x) + C – первообразная функция для f(x), то приращение F(b) – F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x = a до x = b называется *определенным интегралом* и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a), где a – нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ находят:

1) неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ = F(x) + C и берут одну из первообразных F(x)
2) значение F(x) при x = b, т.е. вычисляют F(b)
3) значение F(x) при x = a, т.е. вычисляют F(a)
4) разность F(b) – F(a).

Процесс вычисления можно записать в виде формулы:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Эту формулу называют *формулой Ньютона – Лейбница*.

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где k – постоянная величина
3. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:
$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$$
4. Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция f(x) непрерывна, то
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

При вычислении определенных интегралов применяют *методы*:

1) с помощью неопределенных интегралов (метод непосредственного интегрирования) по формуле Ньютона – Лейбница
2) методом подстановки.

Метод подстановки заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Правило интегрирования способом подстановки:

- Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
- Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

- Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
- Меняют старые пределы интегрирования на новые.
- Производят замену под интегралом и пределов интегрирования.
- Находят полученный интеграл.

Пример1.

$$\int_1^2 (2x+1)^3 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x+1 \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \\ \alpha = 2\cdot 1+1 = 3 \\ \beta = 2\cdot 2+1 = 5 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_3^5 t^3 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}t^4\Big|_3^5 = \frac{1}{8}(5^4 - 3^4) = \frac{1}{8}(625-81) = 68.$$

Пример 2. $$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \left| \begin{array}{c} e^x - 1 = t \\ e^x dx = dt \\ \alpha = 0 \\ \beta = e-1 \end{array} \right| = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 \Big|_0^{e-1} = \frac{1}{5}(e-1)^5.$$

Пример 3. $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 z \cos z dz = \left| \begin{array}{c} \sin z = u \\ \cos z dz = du \\ \alpha = \sqrt{2}/2 \\ \beta = 1 \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Вычисление площади криволинейной фигуры

Пусть на отрезке [a; b] дана непрерывная неотрицательная функция f(x). Проведем вертикальные прямые x = a, x = b до пересечения с графиком функции f(x).

Определение: Фигуру, ограниченную графиком непрерывной неотрицательной функции f(x), отрезком [a; b] и прямыми x = a и x = b , называют *криволинейной трапецией* **(**рис.1).

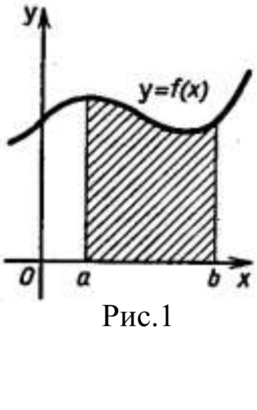


Рис.1

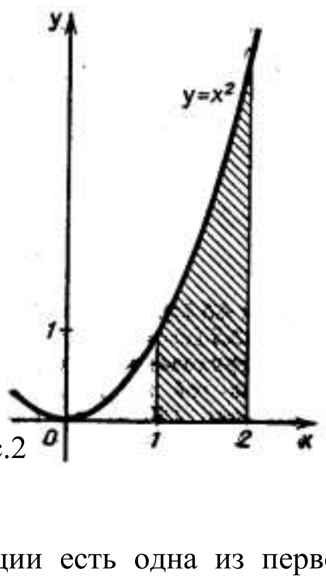


Рис.2

Площадь криволинейной трапеции есть одна из первообразных функции, задающей верхнюю границу трапеции, и может быть вычислена с помощью интегрирования: S = $\int f(x)dx$.

Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема.

Теорема: Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция, а F – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей трапеции (рис.2) равна приращению первообразной на отрезке [a; b], т.е. $S = F(b) – F(a)$

Пример . Вычислите площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2$, прямыми $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$ (рис.2).

Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Следовательно, $S = F(2) – F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

Определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции: $\mathbf{S} = \int_a^b f(x)dx$.

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла, на этом основано его применение к вычислению площадей плоских фигур.

1 случай. Фигура ограничена осью ох, прямыми x = a, x = b и графиком функции y = f(x), причем $f(x) > 0$. $S = \int_a^b f(x)dx$ (рис. 1)

2 случай. Фигура ограничена осью ох, прямыми x = a, x = b и графиком функции y = f(x), причем $f(x) < 0$. $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$ (рис.2)

3 случай. Фигура ограничена осью ох, прямыми x = a, x = b и графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, $f_1(x) > f_2(x)$.

$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$ (рис. 3)

4 случай. Фигура ограничена осью ох, прямыми x = a, x = b и графиком функции y = f(x), причем на интервале (a; c) f(x) > 0, на интервале (c; d) f(x) < 0 и на интервале (d; b) f(x) > 0.

$S = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \int_d^b f(x)dx$ (рис. 4)

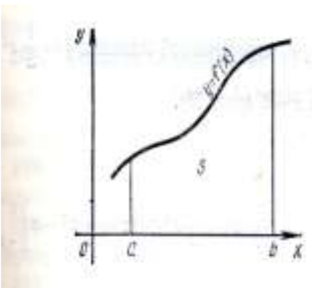


рис.1

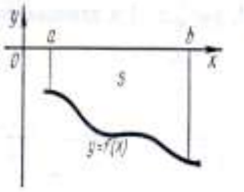


рис.2

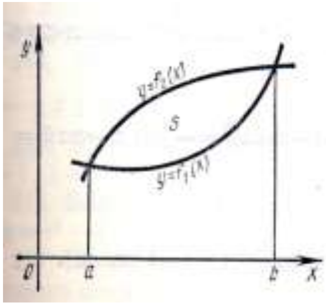


рис.3

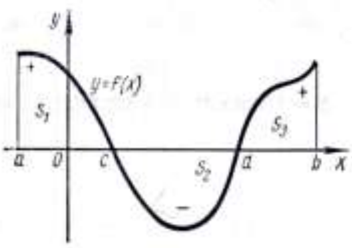


рис.4

Задания для самостоятельной работы
Неопределенный интеграл
Найти интегралы:
Вариант 1

1) $\int(3x^{10}-5x^2+4)dx$ 2) $\int\frac{2dx}{x^5}$ 3) $\int(5x^2-3)^2dx$ 4) $\int\frac{3+2x-x^3}{x^2}dx$

5) $\int 2\sin x dx$ 6) $\int(2^x-5e^x)dx$ 7) $\int(2-3z)^{15}dz$ 8) $\int 3\sin 5x dx$

9) $\int\sin^5 x\cos x\,dx$ 10) $\int\frac{3dx}{1+2x}$

Вариант 2

1) $\int(6x^2-4x^7-2)dx$ 2) $\int\frac{dx}{7x^4}$ 3) $\int(6x-8)^2dx$ 4) $\int\frac{(x+4)^2}{x^2}dx$

5) $\int\frac{3dx}{\cos^2 x}$ 6) $\int(x^2-4e^x)dx$ 7) $\int(5x+9)^6dx$ 8) $\int 6\cos(3x-1)dx$

9) $\int\sin x\cos^6 x\,dx$ 10) $\int\frac{4dz}{3-4z}$

Вариант 3

1) $\int(7x-2x^3)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x^2}$ 3) $\int(7-6x)^2dx$ 4) $\int\frac{x^2-4x+2}{x}dx$

5) $\int\frac{6adu}{\sin^2 u}$ 6) $\int(\frac{1}{x}-e^x)dx$ 7) $\int(2x-7)^5dx$ 8) $\int 4\sin(3-7x)dx$

9) $\int\sin x\cos^5 x\,dx$ 10) $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx$

Вариант 4

1) $\int(3x^5-4)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x^4}$ 3) $\int(3x-8)^2dx$ 4) $\int\frac{(2-4x)^2}{x}dx$

5) $\int 7b\cos\varphi d\varphi$ 6) $\int(2e^x-7^x)dx$ 7) $\int(3-5z)^7dz$ 8) $\int\cos 6x dx$

9) $\int\cos x\sin^4 x\,dx$ 10) $\int\frac{2zdz}{1+z^2}$

Определенный интеграл
Вычислить интегралы:
Вариант 1

1) $\int_0^3 dx$ 2) $\int_1^2 3x^4dx$ 3) $\int_{-1}^1(2x^2-4x+5)dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x dx$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{4dx}{\cos^2 x}$

6) $\int_1^e\frac{dx}{x}$ 7) $\int_1^2 3\sqrt{x}dx$ 8) $\int_{-1}^1 e^{4x}dx$ 9) $\int_0^2\frac{dx}{x+2}$ 10) $\int_2^4\frac{u^2+2}{u^2}du$

Вариант 2

1) $\int_0^3 xdx$ 2) $\int_{-1}^2 4x^3dx$ 3) $\int_{-1}^1(x^2-3x)dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin^2 x}$

6) $\int_1^3\sqrt{x}dx$ 7) $\int_{-1}^1 e^{3x}dx$ 8) $\int_1^2\frac{dx}{x+4}$ 9) $\int_1^2\frac{(1-x)^2}{x^2}du$

Вариант 3

1) $\int_0^3 x^2dx$ 2) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$ 3) $\int_{-1}^1(x^2+1)dx$ 4) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ 5) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$

6) $\int_{1}^{10}\frac{dx}{x^2}$ 7) $\int_{1}^{4}\sqrt{x}\,dx$ 8) $\int_{-1}^{1}(4x^2+\frac{x}{2})dx$ 9) $\int_{0}^{\pi}(e^x-\cos x)dx$

Вариант 4

1) $\int_{-1}^{3}xdx$ 2) $\int_{-2}^{3}2x^2dx$ 3) $\int_{-1}^{3}(x^2-4x+2)dx$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin 2xdx$ 5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2dx}{\sin^2 x}$

6) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2}$ 7) $\int_{-0,5}^{0,5}3(1+z^2)dz$ 8) $\int_{1}^{9}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}+\sqrt{z}\right)dz$ 9) $\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{x^2}du$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

Вариант 1
1) $y = x^2 - 2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$
2) $y = 1/2x^2$, $x + y - 4 = 0$

Вариант 2
1) $y = x^2 - 6x$, $x = 0$
2) $y = x^2$, $x = -2$, $x = 4$, $y = 0$

Вариант 3
1) $y = x^2$, $y = 2x$
2) $y = 8 + 2x - x^2$, $y= x + 6$

Вариант 4
1) $y = 1/2x + 3$, $x = 4$, $y = 0$
2) $y = -x^2 - 1$, $x = 1$, $x = 4$, $x =0$

Тема 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Выполнение заданий
3. Подготовка отчетов

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Сфера применения дифференциальных уравнений.

В приложениях математики к различным отраслям науки техники дифференциальные уравнения занимают важное место. Их роль в практических задачах сравнима с ролью алгебраических уравнений. Разница заключается лишь в том, что, если в алгебраических уравнениях данные и искомые, в основном являются постоянными величинами, то в дифференциальных уравнениях по некоторым заданным функциям требуется определить функцию, которая задается своими производными различных порядков. Широкое распространение дифференциальных уравнений в естествознании объясняется тем, что многие явления и процессы, происходящие в природе, количественно описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. В настоящее время диапазон применения дифференциальных уравнений очень широк. С их помощью решаются задачи математики, физики, химии, биологии, электротехники, радиоэлектроники, экономики и многих других сфер человеческой деятельности.

С помощью дифференциальных уравнений можно создать математическую модель изучаемого физического, химического или биологического процесса. Решение этих уравнений позволяет предсказать свойства изучаемого явления и прогнозировать конечный результат.

Многочисленные приложения теории дифференциальных уравнений требуют как знания соответствующих теоретических положений и законов естествознания, техники, других отраслей, так и теории функций, производных и интегрального исчисления, т.к. решение дифференциального уравнения связано с техникой интегрирования.

С простейшими дифференциальными уравнениями вы встречались при решении задач о нахождении уравнения кривой по заданной функции углового коэффициента ($y' = x$) и об определении закона движения точки по заданной функции скорости ($\frac{ds}{dt} = f(t)$, где $\frac{ds}{dt}$ - скорость движения) . В том и другом случае по заданному уравнению, содержащему производную искомой функции, нужно найти эту функцию. Это и значит решить дифференциальное уравнение. Существуют различные виды дифференциальных уравнений, некоторые из них мы сегодня рассмотрим.

Рассмотрим в качестве примеров некоторые конкретные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

5) Найти уравнение линии, проходящей через точку М(1; 3) и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x - 3$.

Согласно условию, $y' = 2x - 3$ или $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$. Решив полученное уравнение, найдем общее решение. Затем, подставив в него начальные условия $x = 1$, $y = 3$, получим частное решение, т.е. уравнение искомой кривой.

6) Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд. Определить путь, который пройдет тело за 3 сек. (по условию задачи $\frac{ds}{dt} = 5t^2$).

Понятие о дифференциальном уравнении

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Обозначим через $f'(x)$ ее первую производную, через $f''(x)$ – вторую производную и т.д., а дифференциалы функций и аргумента обозначим соответственно dy и dx.

В дифференциальных уравнениях всегда присутствуют производные и дифференциалы функции и аргумента. Это отличительный признак дифференциального уравнения.

Пример. $6y' - xy = 0$, $y' = 2x + y$, $xdy - ydx = 0$ – дифференциальные уравнения.

Наличие самой функции и аргумента в дифференциальном уравнении не является обязательным.

Пример. $dy - 5dx = 0$, $y' = 0$, $ydx = dy$, $y' = x$ – также дифференциальные уравнения.

Задания 1

1. Установить, какие из указанных уравнений являются дифференциальными:

А) $y' + 3x = 0$ б) $y^2 + x^2 = 5$ в) $y = e^x$ г) $y' y - x = 0$ д) $y = \ln|x| + C$

е) $2dy + 3xdx = 0$

Решение: Уравнения б), в), д) не являются дифференциальными, т.к. не содержат производной искомой функции или дифференциалов аргумента и функции; уравнения а), г), е) являются дифференциальными.

2. Даны уравнения: а) $y' = y$ б) $y'' = \sin x$ в) $y = Cx$ г) $y' = y\,\mathrm{tg}x$ д) $\frac{ds}{dt} = 5t$ е) $y^2 = \ln|x|$

Какие из них являются дифференциальными?

Определение: Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется **решением** дифференциального уравнения.

Пример. Даны функции: $y = \ln|x| + C$, $y = Cx$, $y = Ce^x$. Какие из них являются решениями дифференциального уравнения $y'x = y$?

Решение: Функция y = Cx есть решение уравнения $y'x = y$, т.к. подстановка этой функции в уравнение обращает его в тождество. Остальные функции не являются решениями данного уравнения.

Задания 2

1. Какие из перечисленных ниже функций представляют собой решения дифференциального уравнения $y' = x$: а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = \frac{x^2}{2} - 3$; г) $y = \frac{x^2}{2} + 5$?

2. Даны функции: $s = t^2 + C$, $s = t^3 + C$, $s = \frac{t^3}{3} + 5$, $s = 3t^3 - 1$. Какие из них служат решениями дифференциального уравнения $\frac{ds}{dt} = t^2$?

1. Дано уравнение $xy' = y - 1$. Какая из функций $y = 3x + 1$ или $y = Cx + 1$ является его решением?
2. Проверить, является ли функция $y = x^2 + x + C$ решением дифференциального уравнения $dy = (2x + 1)dx$.
3. Является ли функция $s = 3t^3 - 2t$ решением уравнения $ds = (3t^2 - 2)dt$?
4. Показать, что функция $y = \sqrt{x}$ является решением уравнения $2yy' = 1$.
5. Является ли функция $x = y^2 + C$ решением уравнения $x^2dx = ydy$?
6. Проверить, является ли функция $y = Ce^{2x}$ решением уравнений: а) $y' = -2y$; б) $y' = 2y$;
   в) $y' = 2(y + 1)$; г) $y' = 2xy$.

Пример. Нужно решить уравнение $y' = x$. Перепишем это уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = x$. Отсюда $dy = xdx$, после интегрирования обеих частей получим $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Определение: Решение, содержащее произвольную постоянную C, называется **общим решением** дифференциального уравнения.

Решение, в которое подставлено числовое значение C, называется **частным решением** дифференциального уравнения. Значение C вычисляется при подстановке начальных данных в общее решение. Например, функция $y = \frac{x^2}{2} + 3$ есть частное решение дифференциального уравнения $y' = x$.

Геометрически частное решение представляется **одной интегральной кривой**, общее решение – **совокупностью интегральных кривых**.

Пример. Зная, что функция $y = Cx + 1$ является общим решением уравнения $xy' = y - 1$, определить его частное решение, если $y(1) = 5$.

Решение. Подставив в общее решение $y = Cx + 1$ заданные начальные условия $x = 1$, $y = 5$, получим $5 = C \cdot 1 + 1$, откуда $C = 4$. Теперь подставим значение $C = 4$ в общее решение и найдем искомое частное решение $y = 4x + 1$.

Таким образом, при решении дифференциального уравнения сначала получается общее решение. Затем, если известны начальные данные, то можно получить частное решение. Для этого нужно:

1) подставить начальные данные в общее решение и вычислить C;
2) полученное числовое значение C подставить в общее решение.

Задача отыскания конкретного частного решения данного дифференциального уравнения по начальным данным называется **задачей Коши**.

Задание 3

Найти общее и частное решение дифференциального уравнения $y' = 2x$, если $y = 2$ при $x = 1$.

Порядок дифференциального уравнения

Дифференциальные уравнения принято классифицировать в зависимости от порядка производной, входящей в уравнение.

Определение. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется **порядком** дифференциального уравнения.

Пример. $xy' - y = 4$ – дифференциальное уравнение первого порядка, т.к. наивысший порядок производной, входящей в него, - первый;

$y'' - xy' + 5y = 1 + x^2$ – д.у. второго порядка, $y''' + 2xy'' = 0$ – д.у. третьего порядка.

Задание 4

Определить порядок следующих дифференциальных уравнений: а) $y' + 2x = 0$;

б) $y'' + 3y' - 4 = 0$; в) $2dy – 3xdx = 0$; г) $y'' = \cos x$; д) $y^{v} + y^{Iv} – y = 0$.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков: $F(x, y, y') = 0$. если это уравнение можно разрешить относительно y', то оно примет вид $y' = f(x, y)$ или $dy = f(x, y)dx$.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными

Определение. Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – данные функции, называется **уравнением с разделенными переменными**.

Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Пример. $xdx + ydy = 0$, $2ydy = 3x^2dx$, $ds = (3t^2 – 2)dt$, $e^x dx = ydy$, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ - уравнения с разделенными переменными.

Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Пример. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$. Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим $\int x\,dx + \int ydy = C$; $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$; $x^2 + y^2 = 2C$.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ – заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Пример. $x(y^2 – 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$, $1 + y – xy' = 0$ – дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

1.Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.

2.Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.

3.Разделяют переменные.

4.Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.

5.Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

Пример. Найти общее решение уравнения $1 + y' + y + xy' = 0$.

Решение. 1. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$: $1 + \frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0$.

2. Умножим все члены равенства на dx: $dx + dy + ydx + xdy = 0$. Сгруппируем все члены, содержащие dy и dx, и запишем полученные выражения в разных частях равенства:

$(1 + x)dy = -(1 + y)dx$.

3. Разделим обе части равенства на выражение $(1 + x)(1 + y)$: $\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}$.

4. Интегрируя обе части равенства, имеем $\int \frac{dy}{1+y} = -\int \frac{dx}{1+x}$;

$\ln|1+y| = -\ln|1+x| + \ln C$; $\ln|1+y| = \ln\left|\frac{C}{1+x}\right|$; $1+y = \frac{C}{1+x}$; $y = \frac{C}{1+x} - 1$.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить уравнения:

1. $xdy + 2ydx = 0$
2. $x^2dy = y^2dx$
3. $y' = x$
4. $2ydy = 3x^2dx$.
5. $2y^2dy = 3xdx$.
6. $2ydy = (1 - 3x^2)dx$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (x^2 - 1)dx$, если $y = 4$ при $x = 1$.

3. Решить уравнение $ds = (3t^2 - 2)dt$, если $s = 0$ при $t = 1$.

Тема 3. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Выполнение заданий
3. Подготовка рефератов
4. Подготовка отчетов

Определение. Уравнение вида $y' + py = q$, где p и q – функции переменной x или постоянные величины, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**.

Определение. Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называется **дифференциальным уравнением второго порядка.**

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $F(x,y,y', y'') = 0$ или разрешенное относительно y'': $y'' = f(x,y,y')$.

Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида $y'' = f(x)$.

Такое уравнение решается двукратным интегрированием: $\frac{dy'}{dx} = f(x)$; $dy' = f(x)dx$, откуда $y' = \int f(x)\,dx$. Проинтегрировав эту функцию, получим какую-то новую функцию от f(x), которую обозначим через F(x): $y' = F(x)+C_1$; $\frac{dy}{dx} = F(x)+C_1$; $dy = (F(x)+C_1)dx$. Интегрируем еще раз:

$y = \int(F(x)+C_1)dx = \int F(x)dx + \int C_1dx = \Phi(x) + C_1x + C_2$ – общее решение данного дифференциального уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2.

В общее решение уравнения первого порядка входит одна произвольная постоянная C, а в общее решение уравнения второго порядка – две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = 4x$.

$\frac{dy'}{dx} = 4x$, $dy' = 4xdx$, $y' = 4\int x\,dx = 2x^2 + C_1$, $\frac{dy}{dx} = 2x^2 + C_1$, $dy = (2x^2 + C_1)dx$,

$y = \int(2x^2 + C_1)dx = 2\int x^2\,dx + \int C_1 dx = \frac{2}{3}x^3 + C_1x + C_2.$

Полученный результат можно проверить дифференцированием:

$y' = \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + C_1 = 2x^2 + C_1,\ y'' = 4x.$

Определение. **Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами** называется уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – постоянные величины.

1) дифференциальное уравнение содержит производные или дифференциалы искомой функции
2) содержит производную второго порядка
3) линейное относительно искомой функции и ее производных, т.е. содержит их в первой степени
4) уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. коэффициенты при функции и ее производных являются постоянными величинами
5) однородное – уравнение без правой части, т.е. правая часть равна 0.

Теорема 1: Если функция $y = y_1$ – решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то функция $y = ay_1$, где a – постоянный множитель, также является решением этого уравнения.

Теорема 2: Если функции $y = y_1$ и $y = y_2$ – решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то функция $y = y_1 + y_2$ также является решением этого уравнения.

Определение. Два частных решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ называются линейно независимыми, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный множитель, т.е. $y_2 \neq ay_1$ ни при каких значениях a.

Теорема 3: Если $y = y_1$ и $y = y_2$ – линейно независимые частные решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то его общее решение имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Эйлер предложил искать частное решение в виде $y = e^{kx}$, где k – постоянная величина, которую нужно подобрать. При различных значениях k функции $y = e^{kx}$ будут линейно независимы.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Подставим функцию $y = e^{kx}$ и ее производные $y' = k\,e^{kx}$ и $y'' = k^2\,e^{kx}$ в данное уравнение:

$k^2 e^{kx} - 3k\,e^{kx} + 2e^{kx} = 0$. Выносим e^{kx} за скобки: $e^{kx}(k^2 - 3k + 2) = 0$. Т.к. $e^{kx} \neq 0$, $k^2 - 3k + 2 = 0$. Решаем полученное квадратное уравнение относительно k: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Значит частные решения данного уравнения таковы: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Общее решение уравнения имеет вид: $y = C_1e^x + C_2\,e^{2x}$.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется **характеристическим** для данного дифференциального уравнения. Чтобы получить это уравнение, достаточно заменить y'', y' ,y соответственно
на k^2, k, 1.

Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни характеристического	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$

уравнения			
Множества решений	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$	$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 3y' = 0$ б) $y'' - 5y' + 6y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y = -1$, $y' = 3$ при $x = 0$.

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + y' + y = 0$ б) $y'' + 6y' + 13y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Вариант 3

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' - 2y' + y = 0$ б) $y'' + 10y' - 11y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - 4\sqrt{2}\,y' + 6y = 0$, если $y = -3$, $y' = \sqrt{2}$ при $x = 0$.

Вариант 4

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' - y' - 12y = 0$ б) $y'' + 49y' = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 4y' + 4y = 0$, если $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$.

Вариант 5

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' - 22y' + 121y = 0$ б) $y'' - 4y' + 8y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y = -1$, $y' = 3$ при $x = 0$.

Вариант 6

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 3y' = 0$ б) $y'' - 5y' + 6y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y = 2$, $y' = 8$ при $x = 0$.

Вариант 7

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 24y' + 144 = 0$ б) $y'' - 2y' + 3y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - y = 0$, если $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Вариант 8

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 4y' + 4y = 0$ б) $y'' - 3y' + 2y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 2y' - 8y = 0$, если $y = 4$, $y' = -4$ при $x = 0$.

Тема 4. Числовые ряды

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Выполнение заданий
3. Подготовка рефератов
4. Подготовка отчетов

Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Степенные ряды. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

Пусть задана числовая последовательность a_n, $n \in N$. Тогда последовательность $S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in N$, называется **числовым рядом** и обозначается $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Числа a_1, a_2, …называются **членами ряда**, соответственно первым, вторым и т.д., a_n называется **n-м** или **общим членом ряда**.

Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + \ldots + a_n$, называются **частичными суммами ряда**.

Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм сходится. Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то он называется **расходящимся**.

Следовательно, ряд называется сходящимся, если существует предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Этот предел называется **суммой ряда**.

Если ряд сходится и S – его сумма, то будем писать $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Необходимый признак сходимости ряда:

Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Важный класс сходящихся рядов образуют так называемые абсолютно сходящиеся ряды.

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполняется условие $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$. Тогда, если q < 1, то ряд сходится абсолютно, а если q > 1, то ряд расходится.

Ряд называется **условно сходящимся**, если он является сходящимся, но не является абсолютно сходящимся.

Признак Коши. Если для ряда с положительными членами $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ величина $\sqrt[n]{a_n}$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел b, т.е. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = b$, то: 1) в случае b < 1 ряд сходится; 2) в случае b > 1 ряд расходится.

Если b = 1, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Признак Даламбера. Если для ряда с положительными членами $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ отношение (n + 1)-го члена к n-му при $n \to \infty$ имеет конечный предел b, т.е. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$, то: 1) в случае b < 1 ряд сходится; 2) в случае b > 1 ряд расходится.

Если b = 1, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ ($a_n > 0$) таковы, что $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Степенным рядом называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где x_0, a_0, a_1, …, a_n – заданные числа и x принимает действительные значения. Если $x_0 = 0$, то степенной ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Радиусом сходимости степенного ряда называется такое число R, что ряд сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < R$, и расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| > R$.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формулам $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$ или

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Пусть f(x) – функция, бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x = a. Ряд $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{n}(a)}{n!}(x - a)^n + \ldots$ называется **рядом Тейлора** для функции f(x).

Если a = 0, то получается ряд $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{n}(0)}{n!}x^n + \ldots$, который называется **рядом Маклорена**.

Разложение простейших функций в ряды Тейлора и Маклорена

Справедливы следующие разложения:

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots$ $(-1 < x < 1)$

$\mathrm{arctg}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(-1 \le x \le 1)$

$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \dfrac{\alpha}{1}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \ldots$ $(-1 < x < 1)$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ $(-1 < x < 1)$

Задания для самостоятельной работы

Исследовать ряды на сходимость по признаку Даламбера:

Вариант 1

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$ 3) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n} + \ldots$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)!}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n$ 6) $\frac{1}{10}+\frac{1\cdot2}{10^2}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots$

Вариант 2

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 3) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 6) $1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$

Тема 5. Основные понятия теории вероятностей. Закон распределения случайной величины

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Выполнение заданий
3. Подготовка отчетов

Вероятность события

Событие – это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События обозначают большими буквами латинского алфавита A, B, C…

Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти.

Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания не может произойти.

Случайное событие – это событие, которое при испытаниях может произойти или не произойти. Те или иные события реализуются с различной возможностью.

События называются **несовместными**, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

События называются **совместными**, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Классическое определение вероятности: **Вероятностью** P(A) события A называется отношение числа благоприятствующих исходов m к общему числу равновозможных несовместных исходов n: **P(A) =** $\frac{m}{n}$**.**

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий: **P(A +B) = P(A) + P(B).** (эта теорема распространяется на конечное число попарно несовместных событий).

Пример 1. Найти вероятность выпадения числа, кратного 3 при одном бросании игрального кубика. Решение: Событие A – выпадение числа, кратного 3. Этому событию благоприятствуют два исхода: числа 3 и 6, т.е. m = 2. Общее число исходов состоит в выпадении чисел: 1,2,3,4,5,6, т.е. n= 6. Тогда искомая вероятность, по определению, равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Пример 2. В урне 10 белых, 5 красных и 5 зеленых шаров. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым). Решение: Число исходов, благоприятствующих событию A, равна сумме красных и зеленых шаров: m = 10. Общее число равновозможных несовместных исходов равно общему числу шаров в урне: n = 20. Тогда: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости. Решение: Событие А – выпадение цифры 2, вероятность этого события $P(A) = \frac{1}{6}$. Событие В – выпадение цифры 3, вероятность этого события $P(B) = \frac{1}{6}$. События несовместные, поэтому $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Пример 4. Получена партия одежды в количестве 40 штук. Из них 20 комплектов мужской одежды, 6 – женской и 14 – детской. Найти вероятность того, что взятая наугад одежда окажется не женской. Решение: Событие А – одежда мужская, вероятность $P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. Событие В – одежда женская, $P(B) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$. Событие С – одежда детская, $P(C) = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$. Тогда $P(A+C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{7}{20} = \frac{17}{20}$.

Случайная величина, закон ее распределения

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Дискретной называют такую случайную величину, которая принимает счетное множество значений, т.е. такое множество, элементы которого можно подсчитать.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определенном интервале.

Функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, называется **законом распределения дискретной случайной величины.**

Распределение дискретной случайной величины может быть задано в виде таблицы (ряд распределения), в графическом и аналитическом виде.

Задания для самостоятельного решения

Классическое определение вероятности

1. Из букв слова «вероятность» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: А – согласной; В – гласной; С – буква «о».
2. Все натуральные числа от 1 до 30 написаны на одинаковых карточках и положены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?
3. Бросаются две монеты. Какова вероятность того, что обе монеты упадут «решкой» кверху?
4. В урне 6 белых и 4 черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны вынимают еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым?
5. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?
6. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру, и набрал ее наугад. Какова вероятность того, что набранная цифра правильная?

Теорема сложения вероятностей

1. В ящике находятся пуговицы различных цветов: белых – 50%, красных – 20%, зеленых – 20%, синих – 10%. Какова вероятность того, что взятая наугад пуговица окажется синего или зеленого цвета.
2. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбивает 10 очков, равна 0,4; 9 очков – 0,3 и 8 или меньше очков – 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.
3. В магазин поступили телевизоры, 60% которых поставило первое предприятие, 25% - второе и 15% - третье. Какова вероятность того, что купленный телевизор изготовлен на первом или третьем предприятии.
4. При записи фамилий участников соревнований, общее число которых 420, оказалось, что начальной буквой фамилий у 10 из них была А, у 6 – Е, у 9 – И, у 12 – О, у 5 – У, у 3 – Ю, у всех остальных фамилия начиналась с согласной. Определить вероятность того, что фамилия участника начинается с гласной.
5. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?
6. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

Тема 6. Математическое ожидание. Дисперсия

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Выполнение заданий
3. Подготовка рефератов
4. Подготовка отчетов

Основные понятия.

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной называют такую случайную величину, которая принимает счетное множество значений, т.е. такое множество, элементы которого можно подсчитать.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определенном интервале.

Случайная величина **считается заданной**, если известен закон распределения случайной величины.

Распределение дискретной случайной величины может быть задано в виде таблицы (ряд распределения), в графическом и аналитическом виде.

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений всех возможных ее значений на соответствующие вероятности:

$$\mathbf{M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \mathbf{(1)}$$

Пример. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Х, зная закон ее распределения:

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

Решение: По формуле математического ожидания дискретной случайной величины находим: M(x) = -1 · 0,05 + 0 · 0,2 + 1 · 0,4 + 2 · 0,3 + 3 · 0,05 = 11.

Случайную величину X – M называют отклонением величины от ее математического ожидания.

Дисперсия характеризует рассеяние (отклонение) случайной величины относительно математического ожидания.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания M(X) называют **дисперсией случайной величины** X и обозначают D(X), т.е.

$D(X) = M(X - M(X))^2$.   (4)

Для дискретных случайных величин эту формулу можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{D(X)} = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^2 p_i \quad \mathbf{(5)} \quad \textbf{или} \quad \mathbf{D(X) = M(X^2) - (M(X))^2}$$

Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины и ее неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее применять корень квадратный из дисперсии – **среднее квадратическое отклонение**. Эта величина дает представление о размахе колебаний случайной величины около математического ожидания: $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D(X)}$ **(7)**

Пример. Случайная величина задана рядом распределения:

X	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой величины.

Решение: Для нахождения математического ожидания воспользуемся формулой (1), для дисперсии (5), а для среднего квадратического отклонения (7). Результаты вычисления сведем в таблицу:

x	p_i	$x_i p_i$	$x_i - M(X)$	$(x_i - M(X))^2$	$(x_i - M(X))^2 p_i$
-1	0,1	-0,1	-1,7	2,89	0,289
0	0,3	0	-0,7	0,49	0,147
1	0,4	0,4	0,3	0,09	0,036
2	0,2	0,4	1,3	1,69	0,338
∑	1	0,7			0,81

Из таблицы следует, что M(X) = 0,7, D(X) = 0,81, σ = 0,9.

Задания для самостоятельного решения решения

1. Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины.

2. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

X_i	0,1	2	10	20
p_i	0,4	0,2	0,15	0,25

3. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

X_i	-1	1	2	3
p_i	0,48	0,01	0,09	0,42

4. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X, зная закон ее распределения:

X_i	-1	1	2	3
p_i	0,19	0,51	0,25	0,05

5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

X_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

6. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана законом распределения:

X_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Тема 7. Основы дискретной математики

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Подготовка рефератов

Множества и операции над ними

Множество представляет собой соединение, совокупность, собрание некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку. Например, множество учащихся класса, множество букв алфавита, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество книг на полке и т.д.

Предметы, из которых состоит множество, называются его **элементами**.

Элементы множества обозначают малыми буквами латинского или греческого алфавита. Для обозначения множеств используют заглавные буквы латинского алфавита или запись со скобками. Например, A, B или $\{\alpha; \beta; \gamma\}$.

Запись $\alpha \in A$ означает, что элемент α принадлежит множеству A. Запись $\alpha \notin A$ означает, что элемент α не принадлежит множеству A. Например, если N – множество натуральных чисел, то $2 \in N$, $0 \notin N$.

Множество считается **заданным**, если перечислены все его элементы или указано такое свойство его элементов, которое позволяет судить о том, принадлежит данный элемент множеству или нет. Например: $M = \{x \in N \mid x \,\vdots\, 2\}$ – множество четных натуральных чисел.

Множество может содержать как конечное число элементов, так и бесконечное. В первом случае множество называется **конечным**, а число его элементов – **порядком** этого множества; во втором случае множество называется **бесконечным**. Например, множество N натуральных чисел бесконечно, а множество всех букв греческого алфавита конечно, а его порядок 24, т.к. в греческом алфавите 24 буквы.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются **равными** (**одинаковыми**). Если множества A и B равны, то пишут A = B.

Если любой элемент множества B является и элементом множества A, то множество B называется **подмножеством (частью)** множества A. В этом случае говорят, что B содержится в A или A содержит B, и пишут $B \subset A$ или $A \supset B$.

В силу этого определения любое множество является своим подмножеством.

Для удобства рассматривают множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

По определению, пустое множество является подмножеством любого множества.

Таким образом, у любого множества A всегда имеются два очевидных подмножества A и $\varnothing$.

Пример. Найти все подмножества множества $A = \{1; 2; 3\}$. Подмножествами данного множества являются множества: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$, $\{1;2;3\}$, $\varnothing$.

Над множествами можно производить различные операции: пересечение, объединение, разность.

Множество C, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств A и B, называется **пересечением множеств** A и B и обозначается $A \cap B$.

Два множества, пересечение которых является пустым множеством, называются **непересекающимися** множествами.

Объединением множеств A и B называется такое множество C, которое состоит из всех элементов множеств A и B и только из них. В этом случае пишут $C = A \cup B$.

Пример. Объединением отрезков АВ и СД является отрезок АД;

$\{1; 2; 3\} \cup \{4;5\}= \{1; 2; 3; 4;5\}$;

$\{1; 2; 3\} \cup \{3;4\}= \{1; 2; 3; 4\}$.

Пусть даны два множества A и B.

Множество C, которое состоит из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется **разностью множеств** A и B и обозначается $A \setminus B$.

Пример. Если $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2\}$, то $A \setminus B = \{3; 4\}$;

Если $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$, то $A \setminus B = \{1; 2\}$;

Если $A = \{1; 2; 5\}$, $B = \{3; 4\}$, то $A \setminus B = \{1; 2; 5\}$;

Если $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, то $A \setminus B = \varnothing$.

Если $A \supset B$, то разность $A \setminus B$ называется **дополнением множества** B до множества A.

Дидактический материал

1. Найдите множество корней уравнения $(x^2 – 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$.
2. Запишите множество A, элементы которого являются делителями числа 24.
3. Найдите множество целых корней уравнения $9x^2 – 1 = 0$.
4. Пусть M – множество всех корней уравнения $x^5 + 3x^4 + x^3 – 1 = 0$. Какие из чисел 1; - 1; $\frac{1}{2}$; - $\frac{1}{2}$ являются элементами множества M?
5. Найдите все подмножества множества $A = \{3; 4; 5\}$.
6. Сколько подмножеств у множества, состоящего: 1) из одного элемента; 2) из двух элементов; 3) из трех элементов?
7. Найдите $A \cap B$ и $A \cup B$, если 1) $A = \{3; 4; 5\}$, $B = \{3; 5; 6\}$; 2) $A = \{0; 1; 7; 8\}$, $B = \{-7; 0; 6; 9\}$; 3) $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$; 4) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.
8. Найдите $A \setminus B$ и $B \setminus A$ для множеств A и B из задания 5.
9. Найдите множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$, если $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\}$, $C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
10. Пусть N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество действительных чисел. Как эти множества связаны между собой?
11. Найдите все элементы множеств: $M = \{x \in Q \mid 2x = 3\}$; $E = \{x \in N \mid x – 3 < 5\}$.
12. Даны множества $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{1; 2; 4; 6; 8\}$, $C = \{-1; 0; 3; 4; 7; 8\}$. Найдите множества : $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$.

Тема: Отношения. Свойства отношений.

В математике для обозначения какой-либо связи между предметами или понятиями часто пользуются термином «отношение». Например, «5 меньше, чем 12», «24 делится на 6», «прямая a параллельна прямой b», « - 3 не больше 0» и т.п. Для большинства таких отношений используются специальные знаки. Например, для отношения перпендикулярности используется знак $\perp$.

В общем случае для понятия «отношения» мы будем пользоваться символом R: если объект a находится в отношении с объектом b, мы будем писать a R b.

Отношения – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее изученными являются **унарные и бинарные отношения**.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определенного свойства R у элемента множества M. Тогда все элементы a из множества M, которые обладают свойством R, образуют некоторое подмножество, называемое **унарным отношением R**. Например, множество M – это компания друзей: M = {Юрий, Инна, Игорь, Лена, Ирина}. Если свойство R «быть девушкой», то унарное отношение R = {Инна, Лена, Ирина}.

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов множества M. Тогда все пары (a,b) элементов множества M, между которыми существует отношение R, образуют подмножество из множества всех возможных пар элементов $M \times M = M^2$, называемое **бинарным отношением R**: $(a,b) \in R$; $R \subset M \times M$.

Бинарные отношения могут быть заданы любыми способами задания множеств. На конечных множествах бинарные отношения обычно задаются: 1) **перечислением пар**, для которых это отношение выполняется. Например, для множества M = {1,2,3,4} бинарное отношение $R \subset M \times M$, если R означает «быть больше» имеет вид: $R = \{(a,b) \mid a,b \in M, a > b\}$. R = {(4,3), (4,2),(4,1), (3,2), (3,1), (2,1)} (в каждой паре первый элемент больше второго); 2) **матрицей.**

Свойства бинарных отношений:

1. **Рефлексивность.** Бинарное отношение R рефлексивно, если для любого элемента $a \in M$ данное бинарное отношение выполняется, т.е. a R a. Отношение «жить в одном городе» рефлексивно.
2. Антирефлексивность. Бинарное отношение R антирефлексивно, если для каждого элемента $a \in M$ не выполняется бинарное отношение a R a. Отношение «быть сыном» антирефлексивно.
3. Симметричность.Отношение R симметрично, если для любой пары $(a,b) \in M \times M$ бинарное отношение выполняется в обе стороны: из aRb следует bRa. Отношение «учиться в одном колледже» симметрично. Пара элементов (Петров, Иванов) данного бинарного отношения означает «Петров учится в одном колледже с Ивановым». На паре (Иванов, Петров) отношение также выполняется: «Иванов учится в одном колледже с Петровым».
4. Антисимметричность. Бинарное отношение R антисимметрично, если ни для каких различающихся элементов a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.Отношение «быть начальником» антисимметрично. Пара (Рыжков, Зуев) означает «Рыжков – начальник Зуева». Наоборот, (Зуев, Рыжков) не является бинарным отношением «быть начальником».
5. Транзитивность. Бинарное отношение R транзитивно, если для любых элементов a, b, c из того, что aRb и bRc следует aRc. Отношение «быть братом» транзитивно. Пара (Петр, Василий) – «Петр – брат Василия» и пара (Василий, Иван) – «Василий – брат Ивана» делают справедливым отношение (Петр, Иван) – «Петр – брат Ивана».

Типы отношений:

1. **Отношение эквивалентности** – бинарное отношение, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.(«жить в одном городе»)
2. **Отношение нестрогого порядка** – бинарное отношение, если оно обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.(«быть не меньше»)
3. **Отношение строгого порядка** – бинарное отношение, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. («быть больше»)

Тема 8. Численное интегрирование

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала

2. Выполнение заданий
3. Подготовка отчетов

Численное интегрирование.

Не все, даже сравнительно простые функции, могут быть проинтегрированы с помощью элементарных функций. С другой стороны, определенный интеграл от непрерывной функции f(x) обязательно существует. Поэтому важное значение имеют методы приближенного вычисления определенного интеграла. Речь идет о вычислении интеграла $\int_a^b f(x)dx$, где a < b. Определенный интеграл будем вычислять как площадь криволинейной трапеции.

Формула прямоугольников

Самый простой, но и самый грубый метод приближенного вычисления интеграла, когда площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямоугольника. Тогда для вычисления интеграла получаем приближенное выражение: $\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot y_0$, где h – ширина интервала, y_0 – значение функции, вычисленное в нижнем пределе интегрирования.

В общем случае, если интервал [a; b] не является малым, то промежуток от a до b разбивается на n равных частей длины h = $\frac{b-a}{n}$ и для точек деления x_0, x_1, x_2, …, x_n вычисляются значения интегрируемой функции y = f(x). Считаем, что x_0 = a и x_n = b. Площадь криволинейной трапеции заменяется суммарной площадью полученных прямоугольников. В этом случае для вычисления определенного интеграла получаем приближенное выражение (**формула прямоугольников**): $\int_a^b f(x)dx \approx h\,(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$. (1)

Вычисленное значение тем точнее, чем больше n. Оценка погрешности при вычислении по формуле прямоугольников определяется выражением: $R \le \frac{1}{2}\left|f'_{\max}(x)\right| \cdot (b-a) \cdot h$. (2), где $x \in [a; b]$, $\left|f'_{\max}(x)\right|$ - максимальная величина абсолютного значения первой производной во всем интервале интегрирования, причем $\lim_{n\to\infty} R = 0$.

Формула трапеций

В данном методе приближенного вычисления определенного интеграла площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямолинейной трапеции. Очевидно, что при той же затрате труда на вычисления, получим более точный результат, чем при замене площади криволинейной трапеции площадью прямоугольника. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$.

$R \le \frac{h^3}{12}\left|f''_{\max}(x)\right|$.

В общем случае, если интервал интегрирования не мал, его делят на n равных частей $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …,$[x_{n-1}; x_n]$ и к каждому из них применяют **формулу трапеций**:

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$ или $\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$ (3) $R \le \frac{nh^3}{12}\left|f''_{\max}(x)\right|$ (4) – оценка погрешности формулы трапеций.

Формула Симпсона

Значительно более точные результаты получаются, если площадь криволинейной трапеции заменяют площадью полосы, ограниченной сверху не прямой линией, а дугой параболы, проходящей через три точки кривой с абсциссами a, $x_1 = a + h$ и $b = a + 2h$.
Значение определенного интеграла вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\right) \quad (5)$$ – **формула Симпсона**.

Оценка погрешности: $R \le \frac{mh^5}{90}\left|f^{iv}{}_{\max}(x)\right| = \frac{h^4}{180}\cdot\left|f^{iv}{}_{\max}\right|\cdot(b-a)$ (6).

Задания для самостоятельного решения

Блок 1.

Вариант 1

Вычислить по формуле трапеций $\int_1^2 \sqrt{x}dx$, n = 10. Оценить погрешность вычисления. Сравнить с аналитическим решением интеграла по формуле Ньютона – Лейбница.

Вариант 2

Вычислить по формуле прямоугольников $\int_1^2 \sqrt{x}dx$, n = 10. Оценить погрешность вычисления. Сравнить с аналитическим решением интеграла по формуле Ньютона – Лейбница.

Блок 2.

Вычислить интегралы по формуле прямоугольников и формуле трапеций:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, n = 10

б) $\int_1^3 (x^2+1)dx$, n = 4

в) $\int_2^5 x^2 dx$, n = 10

г) $\int_2^{12} \frac{dx}{x}$, n = 10

д) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, n = 5

Тема 9. Численное дифференцирование

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Выполнение заданий
3. Подготовка отчетов

В тех случаях, когда непосредственное дифференцирование оказывается слишком сложным, в силу особенностей аналитического задания функции, пользуются приближенным дифференцированием.

$f(x) = P'(x)$ на отрезке [a ;b]

Погрешность определяется по формуле R (x) = $f'(x)$-P(x) и тогда погрешность производной P'(x) выражается формулой $r(x)=f(x)$ - P'(x)=R'(x)

Конечная формула имеет вид $R'(x) \approx \frac{(-1)^k \Delta^{k+1} y_0}{n\cdot(k+1)}$, где k –это максимальный порядок конечной разности, входящей в P(x)

Пример 1. Построить конечные разности для функции P (x) = x^3, полагая шаг равным единице: h=1.
Решение:

Первая конечная разность функции P(x):

$$\Delta P(x) = P(x+h) - P(x)$$

$$\Delta P(x) = (x+1)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

Вторая конечная разность функции P(x):

$$\Delta^2 P(x) = \Delta[\Delta P(x)];$$

$$\Delta^2 P(x) = [3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1] - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6$$

Конечная разность третьего порядка:

$$\Delta^3 P(x) = \Delta[\Delta^2 P(x)]$$

$$\Delta^3 P(x) = [6(x+1) + 6] - (6x + 6) = 6$$

Конечная разность четвертого порядка:

$$\Delta^4 P(x) = \Delta[\Delta^3 P(x)]$$

$$\Delta^4 P(x) = 6 - 6 = 0$$

Все конечные разности порядка выше четвертого также равны нулю: $\Delta^n P(x) = 0$

Справедливо общее утверждение: если полином

$$P(x) = a^0 x^n + a^1 x^{n-1} + \ldots + a^n$$

является полиномом n-ой степени, то конечная разность n-го порядка – постоянная величина:

$$\Delta^n P(x) = const = n! a_0 h^n$$

Конечные разности порядка выше, чем *n*, равны нулю.
В случае табличного задания функции *y=f(x)* для системы равностоящих точек x_i (i=0,1,2,3,…), где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const$ конечные разности определяются по формулам

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_i$

………………

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

Вычисленные конечные разности располагают в таблице, которую называют таблицей разностей.

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	……
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	…
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	…
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	…
….	..	..	..	….	…	....
…	…	…	..	…	…	…

1. **Пример 1.** Построить таблицу разностей функции *y=f (x),* заданной таблично:

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	5	15	35	70	140

Вычислим конечные разности первого порядка:
$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 5-1=4$
$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 15-5=10$
$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 35-15=20$
$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 70-35=35$
$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 140-70=70$

Определим конечные разности второго порядка

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 10-4=6$
$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 20-10=10$
$\Delta y^2_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 35-20=15$
$\Delta y^2_3 = \Delta\ y_4 - \Delta y_3 = 70-35=35$
Конечные разности третьего порядка:

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 10-4=6$
$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 15-10=5$
$\Delta y^3_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = 35-15=20$ ит.д.
Таблица разностей для данной функции имеет вид:

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0	1	4	6	4	1	14
1	1	5	10	10	5	15	
2	2	15	20	15	20		
3	3	35	35	35			
4	4	70	70				
5	5	140					

Задания для самостоятельного решения:

1. Построить таблицу разностей функции *y=f (x),* заданной таблично:

а)

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	5	15	35	70	140

б)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7,5	2	-3,5	-6	-2,5	10	34,5

2. Составить таблицу конечных разностей функций, заданных аналитически, от начального значения x_0 до конечного x_7, приняв шаг, равным h.
а) $y=x^3 - x^2 +6x - 8,$ $x_0=0$ $h=1;$
б) $y=2x^3 - 8x +20$ $x_0=0,5$ $h=0,5$
в) $y=5x^3 - 8x +4$ $x_0=0$ $h=2$
г) $y=4(x+1)(x-2)(x-3)$ $x_0=0$ $h=1$

3. Для функций, заданных таблично, найти аналитическое выражение первой производной.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	6	10	26	60	118	206	330	496

Подготовка сообщений . Тематика рефератов по разделам курса

1. Подготовка сообщений:

Сообщение – это выступление информативного, иллюстративного или аналитического характера, как правило, по одной проблеме. Оно может быть продуктивного (анализ материала) или репродуктивного (пересказ материала) характера.

Требования к сообщению:

- отбор концептуальной информации, заключающей в себе главную идею и основные положения, раскрывающие суть процесса или явления;
- рассмотрение разных подходов к проблеме, различных точек зрения на нее;
- осмысление информации, выделение главных мыслей;
- выстраивание структуры ответа;
- соблюдение стиля выступления.

2. Методические рекомендации реферирования:

Реферат – это сжатое изложение основной информации первоисточника на основе ее смысловой переработки.

Этапы работы над учебным рефератом:

1. выбор темы
2. подбор и изучение основных источников по теме
3. составление библиографии
4. обработка и систематизация информации
5. разработка плана реферата
6. написание реферата.

Примерная структура реферата

Введение. Определяется актуальность темы, формулируется суть исследуемой проблемы, указываются цель и задачи реферата.

Основная часть. Каждый ее раздел доказательно раскрывая отдельный вопрос логически является продолжением предыдущего.

Заключение. Подводятся итоги или дается обобщенный вывод по теме реферата.

Список литературы. Как правило, при разработке реферата используют не менее 7- 10 различных источников.

Приложение. Графики, чертежи, рисунки, портреты ученых и т.д.

Основные критерии оценки работ:

- грамотность и логичность изложения материала
- структура работы (введение, основная часть, вывод, приложения, литература)
- соответствие оформления реферата стандартам.

3. Примерная тематика сообщений и рефератов:

1. Из истории развития математики
2. Различные системы счисления
3. Математика в природе
4. Знаменитая женщина – математик С.В. Ковалевская
5. Лобачевский Н.И.
6. О квадратных корнях и квадратных уравнениях
7. Из истории понятия функции
8. Лагранж Ж.Л.
9. Леонард Эйлер
10. Исаак Ньютон

11. Лейбниц Г.В.
12. Рене Декарт
13. Из истории дифференциального исчисления.
14. Гаусс К.Ф.
15. О.Л. Коши
16. Архимед
17. Из истории понятия предела функции
18. Задачи, приводящие к понятию производной
19. Применение производной в физике
20. Чебышев П.Л.
21. О неравенствах
22. О приближенных вычислениях
23. Из истории интегрального исчисления
24. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей и объемов тел
25. Великие математики

Порядок формирования отчета:

- титульный лист
- лист с ребусом (каждый ребус на отдельном листе), на обороте листа ответ в правом нижнем углу.

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Дадаян, А. А. Математика [текст]: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования / А. А. Дадаян. - изд. 2е - Москва: ФОРУМ : НИЦ-ИНФРА-М,2015. - 544 с.
2. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике[текст]: учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования / А. А. Дадаян. - Москва: ФОРУМ: НИЦ-ИНФРА-М,2015. - 352 с.

Дополнительные источники:

1. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике [текст]: учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. - Москва : Высш. шк., 2014. – 496 с.
2. Богомолов, Н. В. Сборник задач по математике [текст]: учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - изд. 6е - Москва: Дрофа, 2014. – 400 с.
3. Богомолов, Н. В. Математика. Дидактические задания[текст]: учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования / / Н. В. Богомолов, Л. Ю. Сергиенко. - Москва: Дрофа, 2014. – 240 с.

Интернет-ресурсы:

1. Электронно-библиотечная система (ЭБС) BOOK.ru.
2. Сервисы Google apps для образования.
3. Виртуальная обучающая среда с функционалом системы дистанционного обучения на базе moodle и bigbluebutton edu.blpk-uu.ru

Методические указания к выполнению самостоятельных работ для студентов 2 курса специальности080211 Управление, эксплуатация и обслуживание многоквартирного дома

Намдакова Надежда Петровна
Домиева Наталья Федоровна

Сдано в производство__________
Формат_60х84_1/16_
Бумага ксероксная. Ризография
Усл. печ.л.______уч.изд.л ______
Тираж__20___экз. Заказ_№________
Отпечатано БЛПК, Улан-Удэ, пр. Победы, 20