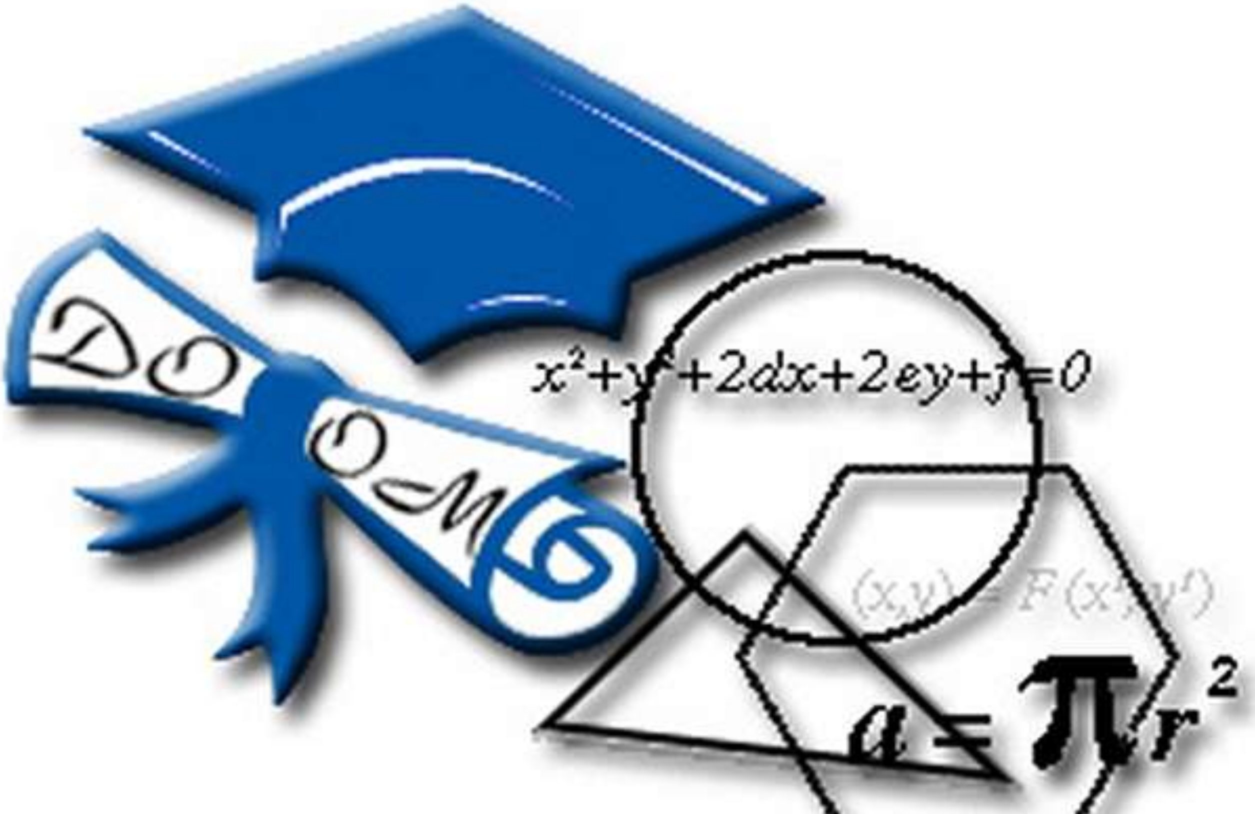
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РБ
ГБПОУ «БУРЯТСКИЙ ЛЕСОПРОМЫШЛЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ»
Учебно-методический комплекс дисциплины



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2018г.

Методические указания по выполнению лабораторных работ и практических занятий – Улан–Удэ, сервис-центр БЛПК: 2018 г., 48 стр.
специальность 350201 «Лесное и лесопарковое хозяйство»
дисциплина математика
(наименование дисциплины по учебному плану)

Рекомендовано к изданию
методическим Советом БЛПК
в качестве учебного пособия.

Авторы: Домиева Н.Ф.
Намдакова Н.П. преподаватели математики БЛПК
(Ф.И.О.) (занимаемая должность и место работы)

Методические указания предназначены для выполнения практических работ по математике студентами 2 курса. Данное пособие предназначено для формирования знаний, умений, навыков по следующим разделам:
«Математический анализ», «Элементы теории вероятностей и аналитической геометрии».

Рецензенты: Манзарова Т.Г., преподаватель математики БЛПК
Баргуев С.Б., к.ф.-м.н., зав.каф. высшей математики и общепроф. дисциплин БИИК СибГУТИ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Методические указания предназначены для изучения курса учебной дисциплины «Математика», направлены на формирование знаний и умений в этой области. Эти знания необходимы обучающимся для более успешного обучения будущей профессии, для будущей трудовой деятельности.

В результате изучения курса студенты получают представление

- о роли и месте математики в современном мире, общности ее понятий и представлений;
- о роли математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин и в профессиональной деятельности.
- об истории возникновения, развития и становления математики как основополагающей дисциплины, необходимой для изучения профессиональных дисциплин
- о связи математики с профессиональными и специальными дисциплинами.

знакомятся

- с основами аналитической геометрии: понятиями базиса, с системой координат на плоскости и в пространстве, координатами точки, действиями над векторами;
- с основными понятиями и методами математического анализа, дискретной математикой, теорией вероятностей и математической статистикой
- с основными численными методами решения прикладных задач;

учатся

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных;
- решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятностей;
- находить функцию распределения случайной величины.

2. Общие требования.

2.1. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических работ

<u>Студенты должны:</u>

знать:

- первый и второй замечательные пределы;
- определение производной, ее геометрический смысл;
- основные методы интегрирования;
- таблицу простейших интегралов;
- типы задач, приводящие к дифференциальным уравнениям;
- определение дифференциального уравнения;
- понятия: событие, частота и вероятность появления события, совместные и несовместные события, полная вероятность;
- теорему сложения вероятностей;
- способы задания случайной величины;
- определения непрерывной и дискретной случайных величин;
- закон распределения случайной величины;
- способы представления функции в виде прямоугольников и трапеций;
- выражения для определения предельных абсолютных погрешностей;
- интерполяционные формулы Ньютона;
- таблицу конечных разностей;

уметь:

- составлять дифференциальные уравнения на простейших задачах;
- решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;
- решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка;
- решать однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
- вычислять производные функции при данном значении аргумента;
- исследовать функции с помощью производной и строить графики;
- интегрировать простейшие определенные интегралы;
- находить частные производные различных порядков.
- решать задачи с применением теоремы сложения вероятностей для несовместных событий.
- вычислять интегралы по формулам прямоугольников, трапеций;
- по табличным данным находить аналитическое выражение производной.

2.1. Требования к содержанию и оформлению практических работ

После выполнения лабораторно-практических работ студенты оформляют отчеты. Отчеты оформляются в тетради для практических работ.

В отчете студент записывает тему, цель, оформляет все выполненные задания в соответствии с *Требованиями к оформлению текстовой документации*, отвечает на контрольные вопросы.

2.2. Требования к процедуре выставления оценок

Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе в журнал после выполнения и оформления работы, по результатам защиты работы, ответов на контрольные вопросы.

2.3. Критерии выставления оценок:

Оценка «5» ставится при своевременной сдаче отчета, 90-100% выполнении объема работы, правильных ответов на контрольные вопросы;

Оценка «4» ставится при своевременной сдаче отчета, 75-80% выполнении объема работы, при допущении незначительных неточностей в ответах на контрольные вопросы;

Оценка «3» ставится при сдаче отчета, 55-65 % выполнении объема работы, при допущении неточностей в ответах на контрольные вопросы;

Оценка «2» ставится при не сдаче отчета, 0-50% выполнении объема работы, при допущении неточностей в ответах на контрольные вопросы.

3. Перечень лабораторных и практических занятий

Тема, содержание ЛПР
Практическая работа № 1. Дифференцирование сложных функций.
Практическая работа № 2. Исследование функции на точку перегиба.
Практическая работа № 3. Исследование функции и построение графика
Практическая работа № 4. Решение задач на минимум и максимум функции.
Практическая работа № 5. Вычисление определенного интеграла методом подстановки.
Практическая работа № 6. Вычисление определенного интеграла методом по частям.
Практическая работа № 7. Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций.
Практическая работа № 8. Решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.
Практическая работа № 9. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений порядка с постоянными коэффициентами
Практическая работа № 10. Выполнение операций над векторами заданными своими координатами.
Практическая работа № 11. Решение задач на нахождение расстояния между двумя точками и координат точек, делящих отрезок в данном отношении.

4. Указания к выполнению практических работ

Практическая работа №1

Тема: Дифференцирование сложных функций.

Цель: Отработка умения находить производные с помощью формул и правил дифференцирования.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория.

Производной функции y=f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Обозначение: y' или f' (x). $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Функция	*Производная*	*Функция*	*Производная*
c(const)	0	a^x	$a^x\ln a$
x	1	e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x$	$-\sin x$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования функций

1. $(ku\cdot(x))'=k\cdot u'(x)$

2. $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$

3. $(uv)'=u'v+v'u$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

*Если у есть функция от u: y=F(u), где u=f(x), т.е. если у зависит от х через промежуточный аргумент u, то y=F(u)=F(f(x)) называется функцией от функции или **сложной функцией**.*

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $y'(x)=F'(u)u'(x)$

Функция	**Производная**	**Функция**	**Производная**
$(u)^n$	$nu^{n-1}\cdot u'$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}\cdot u'$	$\sin u$	$(\cos u)u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\cos u$	$(-\sin u)u'$
a^u	$a^u \ln a\cdot u'$	tgu	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
e^u	$e^u\cdot u'$	$ctgu$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u\cdot \ln a}$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих ее функций. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по ее собственному аргументу.

Очень важно правильно определить порядок следования промежуточных функций. Например, для функции $y = \ln tg^2 3x$ промежуточные функции расположены в следующем порядке:

1. Логарифмическая $\ln tg^2 3x$
2. Степенная $(tg\,3x)^2$
3. Тригонометрическая $tg\,3x$
4. Линейная $3x$

$$y=\ln tg^2 3x$$

$$y' = \frac{1}{tg^2 3x}\cdot(tg^2 3x)' = \frac{1}{tg^2 3x}\cdot 2tg3x\cdot(tg3x)' = \frac{1}{tg^2 3x}\cdot 2tg3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)' =$$

$$= \frac{1}{tg^2 3x}\cdot 2tg3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3 = \frac{6}{\sin 3x\cdot\cos 3x} = \frac{12}{\sin 6x}$$

Пример 1: *$y = (x^2+3x)^5$, найти $y'(1)$.*

Промежуточные функции:

1. степенная $(x^2+3x)^5$

2. квадратичная x^2+3x

$y' = 5(x^2+3x)^4\ (x^2+3x)' = 5(x^2+3x)^4 * 2x+3)$ $\qquad$ $y'(1) = 5(1^2+3\cdot 1)^4\ (2*1+3) = 3900$

Задания для самостоятельной работы

Блок 1. Вариант 1

Найти производные функций:

1) $y = x^4 – 4x^3 – 8x^2 + 13$ $\qquad$ 2) $y = \sqrt{x}(1-2x)$ $\qquad$ 3) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

4) $y = \sqrt{5-2x}$ $\qquad$ 5) $f(x) = tg3x$ $\qquad$ 6) $y = 31^{t^3+3t}$

7) $y = 2x^7 – 3x^5 – x – 10$ $\qquad$ 8) $y = \sqrt{x}(5x-1)$ $\qquad$ 9) $y = \frac{\sqrt{x}}{4+x}$

10) $y = (2x – 3)^5$ $\qquad$ 11) $f(x) = \sin 2x$ $\qquad$ 12) $y = 2\sqrt{1+2x-x^2}$

13) $y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{7}$ $\qquad$ 14) $y = 5x^2 - \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ 15) $y = x^3 - \frac{2}{x^3}$

16) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$ $\qquad$ 17) $\sqrt{x}(x^2-3x)$ $\qquad$ 18) $y = \frac{2x+3}{\cos x}$

Блок 1. Вариант 2

Найти производные функций:

1) $y = 3x^6 + 3x^5 –2x + 5$ $\qquad$ 2) $y = \sqrt{x}(3x-6)$ $\qquad$ 3) $y = \frac{x-1}{2-3x}$

4) $y = (6x + 2)^5$ $\qquad$ 5) $y = 2^{\sqrt{x}+3}$ $\qquad$ 6) $y = \ln 3x$

7) $y = x^6 – 3x^4 +7x^2 - 14$ $\qquad$ 8) $y = \sqrt{x}(2-3x)$ $\qquad$ 9) $y = \frac{\sqrt{z}}{5+z}$

10) $y = \sqrt{5-2x}$ $\qquad$ 11) $y = \lg(3x^2 + 4x – 7)$ $\qquad$ 12) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

13) $y = -\frac{3}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{2}$ $\qquad$ 14) $y=\sqrt{x}(x^2-2x)$ $\qquad$ 15) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

16) $y = 5x^2 - \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ 17) $y = (2x – 3)^5$ $\qquad$ 18) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

Блок 2

Найти производные сложных функций

1. $y = (9 — x^2)^4$
2. $y = (x^4-x-2x^2)^4$
3. $y = \sqrt{x^3+1}$
4. $y = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$
5. $y=\sin 5x$
6. $y=\cos^2 3x$
7. $y=8\sin^3 5x$
8. $y=\ln x^2 \frac{x+2}{x-2}$
9. $y=\ln \sin^3 5x$
10. $y=\ln\sqrt{2x-1}$
11.
12. $y=\frac{1}{(x^2-1)^4}$
13. $y=(x^2+6)\sqrt{x^2-3}$
14. $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$
15. $y=\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$
16. $y=\frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}$
17. $y=\frac{\ln x-2}{\ln x}$
18. $y=\ln(2x^2-3)$

11.y=ln $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется дифференцируемой?
2. Как найти частное значение производной?
3. Чему равна производная постоянной величины?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. - М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. - М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова. 2015

Практическая работа № 2

Тема: Исследование функции на точку перегиба

Краткая теория. Необходимое условие перегиба

Если в точке x_0 есть перегиб графика функции $y=f(x)$, то:
$f''(x_0)=0$ либо значения $f''(x_0)$ не существует.

Данная фраза подразумевает, что функция $y=f(x)$ **непрерывна** в точке x_0 и в случае $f''(x_0)=0$ – дважды дифференцируема в некоторой её окрестности.

Необходимость условия говорит о том, что обратное справедливо не всегда. То есть из равенства $f''(x_0)=0$ (либо небытия значения $f''(x_0)$) **ещё не следует** существования перегиба графика функции $y=f(x)$ в точке x_0. Но и в той, и в другой ситуации x_0 называют **критической точкой второй производной**.

Если вторая производная $y=f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то в данной точке существует перегиб графика функции $y=f(x)$.

Проанализируем вторую производную функции $f(x)=x^2$:
$f'(x)=(x^2)'=2x$
$f''(x)=(2x)'=2$

Получена положительная функция-константа, то есть *для любого значения «икс»* $f''(x)=2>0$. Факты, лежащие на поверхности: парабола $f(x)=x^2$ вогнута на всей **области определения**, точки перегиба отсутствуют. Легко заметить, что отрицательный коэффициент при x^2 «переворачивает» параболу и делает её выпуклой.

Экспоненциальная функция $f(x)=e^x$ также вогнута на R

$f'(x)=(e^x)'=e^x$
$f''(x)=(e^x)'=e^x>0$ для любого значения «икс».

Точек перегиба у графика $f(x)=e^x$ нет.

Алгоритм исследования графика функции $y=f(x)$ на выпуклость, вогнутость и наличие перегибов:

1) На первом шаге находим **область определения функции** $y=f(x)$ и **точки разрыва**.

2) Разыскиваем критические значения. Для этого берём вторую производную $f''(x)$ и решаем уравнение $f''(x)=0$. Точки, в которых не

существует 2-й производной, но которые входят в область определения самой функции – тоже считаются критическими!

3) Отмечаем на числовой прямой все найденные точки разрыва и критические точки. **Методом интервалов** определяем знаки $f''(x)$ на полученных интервалах. Как только что пояснялось, рассматривать следует **только те** промежутки, которые входят в область определения функции $y=f(x)$. Делаем выводы о выпуклости/вогнутости и точках перегиба графика функции $y=f(x)$.

Пример 1

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика $f(x)=\frac{(x-1)^3}{4}+2$

Решение:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Очень хорошо.

2) Найдём вторую производную. Можно предварительно выполнить возведение в куб, но значительно выгоднее использовать **правило дифференцирование сложной функции**:

$$f'(x)=\left(\frac{(x-1)^3}{4}+2\right)'=\frac{1}{4}\cdot((x-1)^3)'+(2)'=\frac{1}{4}\cdot 3(x-1)^2\cdot(x-1)'+0=\frac{3}{4}(x-1)^2$$

$$f''(x)=\left(\frac{3}{4}(x-1)^2\right)'=\frac{3}{4}\cdot 2(x-1)\cdot(x-1)'=\frac{3}{2}(x-1)$$

Найдём критические точки второй производной:

$f''(x)=0$

$\frac{3}{2}(x-1)=0$

$x=1$ – критическая точка

3) Проверим выполнение достаточного условия перегиба. Определим знаки второй производной на полученных интервалах $(-\infty;1),(1;+\infty)$.

Используем **метод интервалов**.

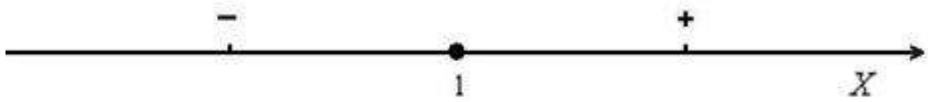
Выберем наиболее выгодную точку $x=0$ интервала $(-\infty;1)$ и вычислим в ней значение второй производной:

$f''(0)=\frac{3}{2}(0-1)=-\frac{3}{2}<0$, следовательно, $f''(x)<0$ в любой точке интервала $(-\infty;1)$.

Из интервала $(1;+\infty)$ возьмём значение $x=2$ и проведём аналогичное действие:

$f''(2)=\frac{3}{2}(2-1)=\frac{3}{2}>0$, а значит, $f''(x)>0$ и на всём интервале $(1;+\infty)$.

В результате получены следующие знаки второй производной:



Таким образом, график самой функции $f(x)=\frac{(x-1)^3}{4}+2$ является выпуклым на интервале $(-\infty;1)$ и вогнутым на $(1;+\infty)$. При переходе через $x=1$ вторая производная меняет знак, поэтому в данной точке существует перегиб графика.

Найдём ординату: $f(1)=\frac{(1-1)^3}{4}+2=0+2=2$

Ответ: график функции выпукл на интервале $(-\infty;1)$ и вогнут на $(1;+\infty)$, в точке $(1;2)$ существует перегиб графика.

Как вариант, пойдёт и запись «…в точке $x=1$ существует перегиб графика».

<u>Пример 2</u>

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика $f(x)=x^2e^x$

Решение:
1) Функция определена и непрерывна на $\Re$.

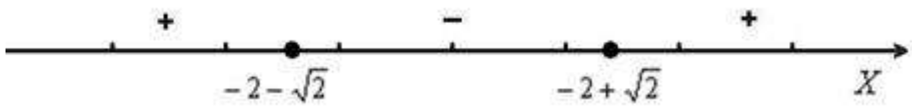
2) Найдём критические точки второй производной:
$$f'(x)=(x^2e^x)'=(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$$

$$f''(x)=((2x+x^2)e^x)'=(2x+x^2)'\cdot e^x+(2x+x^2)\cdot(e^x)'=(2+2x)e^x+(2x+x^2)e^x=$$
$$=(2+2x+2x+x^2)e^x=(x^2+4x+2)e^x=0$$

Так как $e^x>0$, то корни могут появиться только из решения **<u>квадратного уравнения</u>**:
$$x^2+4x+2=0$$
$$D=16-8=8$$

Дискриминант положителен, и на подходе две критические точки:
$$\sqrt{D}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$x=\frac{-4-2\sqrt{2}}{2}=-2-\sqrt{2}\approx-3{,}41$$
$$x=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2}=-2+\sqrt{2}\approx-0{,}59$$

3) Определим знаки второй производной. Можно использовать стандартный **метод интервалов**, но здесь $e^x>0$, и учитывая, что $y=x^2+4x+2$ – парабола, ветви которой направлены вверх, получаем:



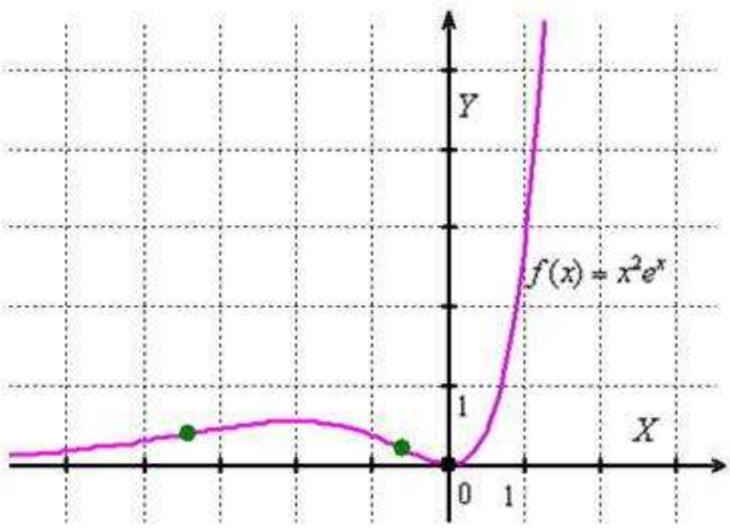
Таким образом, график функции $f(x)=x^2e^x$ является выпуклым на интервале $(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$ и вогнутым на $(-\infty;-2-\sqrt{2})\cup(-2+\sqrt{2};+\infty)$. В обеих критических точках существуют перегибы графика (так как 2-я производная при переходе через них меняет знак).

Найдём ординаты данных точек:

$f(-2-\sqrt{2})=(-2-\sqrt{2})^2\cdot e^{-2-\sqrt{2}}\approx 0{,}38$

$f(-2+\sqrt{2})=(-2+\sqrt{2})^2\cdot e^{-2+\sqrt{2}}\approx 0{,}19$

Ответ: график функции выпуклый на интервале $(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$ и вогнутый на $(-\infty;-2-\sqrt{2})\cup(-2+\sqrt{2};+\infty)$. В точках $x=-2-\sqrt{2},\ x=-2+\sqrt{2}$ существуют перегибы графика.



$f(x)=1+4x^2-\dfrac{2x^4}{3}$

Задания для самостоятельной работы

1.Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функций $f(x)=x^3,\ f(x)=x^4$.

2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика $f(x)=1+4x^2-\dfrac{2x^4}{3}$

3.Исследовать график функции $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$ на выпуклость, вогнутость и точки перегиба

Контрольные вопросы:

1) Что называется областью определения функции?

2) Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
3) Необходимое и достаточное условия выпуклости вниз (вверх) графика функции?
4) Какая точка называется точкой перегиба функции? Признак точки перегиба? 1) Что называется областью определения функции?
5) Как найти точки перегиба и промежутки выпуклости функции?
6) Как находятся точки пересечения графика функции с осмии координат? 7) Как найти промежутки монотонности функции и точки экстремума?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. - М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. - М, 2014
3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова, 2015

Оформление отчета

1. Тема, цель
2. Решение задач.
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по работе.

Практическая работа №3

Тема: Исследование функции и построение графика

Цель: корректировать знания, умения и навыки по теме: «Исследование функции и построение ее графика, применять вторую производную для решения физических задач.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

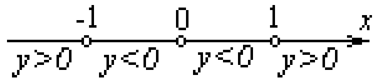
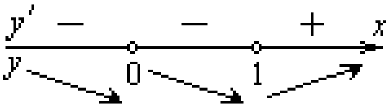
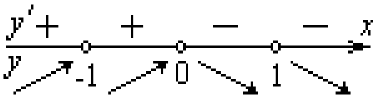
Краткая теория

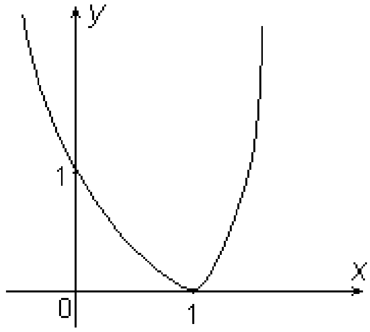
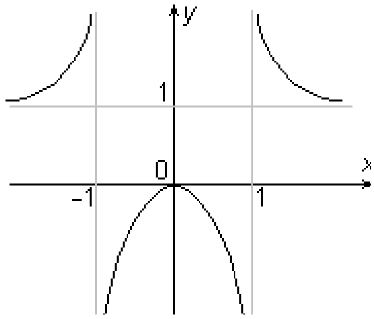
Обучающая таблица

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$**;** ***б)*** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$**.**

№	План исследования ф-ции	Применение плана	
		а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$	*б)* $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$
1	*Находим область определения функции*	$D(f)=R$	$x^2-1=0$, $x=\pm1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$

2	*Исследуем функцию на четность, нечетность*	$f(-x)=3x^4+4x^3+1\neq\pm f(x)$ $\Rightarrow$ *функция ни четная, ни нечетная*	$f(-x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}=f(x)$ $\Rightarrow$ *функция четная*
3	*Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства*	$3x^4-4x^3+1=0,\ \left(3x^4-3x^3\right)-$ $-\left(x^3-1\right)=0$, $(x-1)^2\left(3x^2+2x+1\right)=0$, $x-1=0$, $x=1$ - *нуль функции*	$\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$, 
4	***Находим производную функции и её критические точки***	$f'(x)=\left(3x^4-4x^3+1\right)'=12x^3-$ $-12x^2=12x^2(x-1)$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0;1$ - ***критические точки функции***	$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'=$ $=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=-\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ - ***критическая точка функции***
5	***Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции***	 $y'(-1)<0, y'(0{,}5)<0, y'(2)>0$ ***x=0 – не является точкой экстремума,*** ***x=1 – точка минимума,*** $y_{min}=y(1)=0$	 $y'(-2)>0, y'(-0{,}5)>0,$ $y'(0{,}5)<0, y'(2)<0$, ***x=0 – точка максимума,*** $y_{max}=y(0)=0$
6	***Находим предел функции при*** $x\to\pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\left(3x^4-4x^3+1\right)=\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$

7	***Строим эскиз графика функции***		

<u>Примеры. Исследуйте и постройте графики функций:</u>

1) $y = x^2 - 3x + 2$***; 2)*** $y = 2x^2 - x^4 - 1$***; 3)*** $y = 6x - x^2 - 5$***; 4)*** $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$***; 5)*** $y = 3x - x^3$***; 6)*** $y = x^3 - 3x^2 + 4$***; 7)*** $y = x^3 - 3x + 1$***; 8)*** $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$***; 9)*** $y = x^2 + \frac{1}{x}$**.**

Задания для самостоятельной работы

<u>Вариант 1.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и постройте ее график.

<u>Вариант 2.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2$ и постройте ее график.

<u>Вариант 3.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Вариант 4.

1. Исследуйте функцию $f(x)=12x-x^3$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$ и постройте ее график.

Вариант 5.

1. Исследуйте функцию $f(x)=3x^4-6x^2+4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-x^3+3x+2$ и постройте ее график.

Вариант 6.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+1$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-3x$ и постройте ее график.

Вариант 7.

1. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-x^4+5x^2+4$ и постройте ее график.

Вариант 8.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-x^2$ и постройте ее график.

Контрольные вопросы:

1. Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
2. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
3. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.

Литература:

1.Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2.Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3.Апанасов П.Т. Сборник задач по математике. 2015

Оформление отчета

5. Тема, цель
6. Решение задач.
7. Ответы на контрольные вопросы
8. Вывод по работе.

Практическая работа №4
Тема: Решение задач на минимум и максимум функции

Цель: Отработка понятия производной, знакомство ее физическим и геометрическим смыслом, формирование умения находить производные, применять производную для решения физических, корректировка знаний, умений и навыков в теме: «Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

Обучающие таблицы

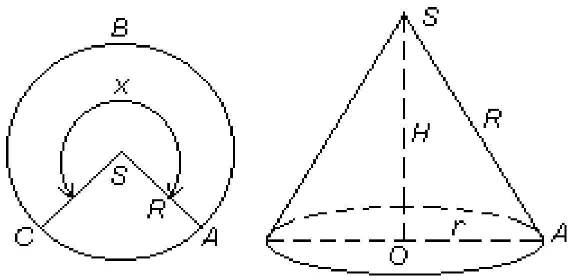
<u>Задание.</u> Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ *на промежутке* $[0;2]$.

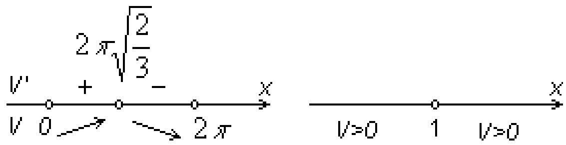
№	*План нахождения* y_{min} *и* y_{max} *на* $[a;b]$	*Применение плана*
1	*Находим производную функции*	$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
2	*Находим критические точки функции*	$y' = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$ *или* $x^2 - 1 = 0$, $x = -1; 0; 1$ - *критические точки функции*
3	*Выбираем критические точки, лежащие внутри* $[a;b]$	$0;1 \in [0;2]$
4	*Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах*	$y(0) = -3$ $y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

	отрезка	$y(2)=16-8-3=5$
5	*Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее*	$y_{min}=y(1)=-4$, $y_{max}=y(2)=5$

Геометрические задачи на нахождение оптимальных значений величин.

Задание. Из кружка жести радиуса R вырезается сектор и из оставшейся части круга делается коническая воронка. При какой величине угла вырезаемого сектора объём воронки будет наибольшим?

№	*План решения*	*Применение плана*
1	*Строим рабочий чертеж*	
2	*Записываем исходную формулу для вычисления величины, экстремальное значение которой требуется найти*	$V_к=\frac{1}{3}\pi r^2 H$
3	*Вводим переменную величину x и выражаем через неё значения всех величин исходной формулы*	*Пусть x – величина центрального угла оставшегося сектора, тогда* $\left|\cup ABC\right|=Rx$ *и* $\left|\cup ABC\right|=2\pi r$*, значит* $2\pi r=Rx$ *и* $r=\frac{Rx}{2\pi}$. *Высота воронки* $H=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$
4	*Подставляя найденные значения величин в формулу, представляем её как функцию аргумента x*	$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\cdot\sqrt{4\pi^2-x^2}$, $V=\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2x^2-x^6}$

5	*Задаем (по смыслу задачи) область определения функции*	$0 < x < 2\pi$, $D(V) = (0; 2\pi)$
6	*Функцию аргумента х исследуем на экстремум на найденном числовом промежутке*	$V'(x) = \dfrac{R^3 x^3 (8\pi^2 - 3x^2)}{24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 x^4 - x^6}}$, $V'(x) = 0$, $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ $V_{max} = V(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}})$ 
7	*Записываем ответ*	*Величина вырезаемого угла равна* $2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 66^0$

ЗАДАЧА 1: Заготовленна изгородь длиной 480м. Этой изгородью надо огородить с трех сторон, примыкающий к реке, участок. Какова должна быть ширина и длина участка, чтобы его площадь была наибольшей при заданной длине изгороди?

РЕШЕНИЕ:

S=AB·BC

Пусть AB=x, тогда BC= 480-2x

S(x) = x · (480 - 2x) = 480x - 2x^2

D(x) = (0;240), т.к. S(x) > 0

480x – 2x^2 > 0

2x · (240 – x) > 0

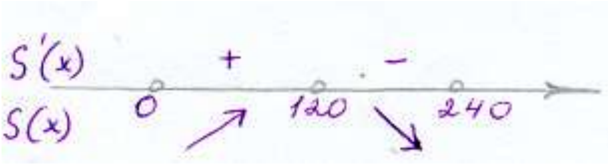
$x_1 = 0$, $x_2 = 240$

0 < x < 240

S? (x) = 480 - 4x

S? (x) = 0, 480 - 4x =0

x = 120



Т.о. S_{max} = S (120) = 28800м^2 при АВ = 120м и ВС = 240м

Ответ: при ширине 120м и длине 240м площадь участка будет наибольшей.

Задания для самостоятельной работы

Блок 1. *Применяя указанный выше план, найдите наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на промежутке* $[a;b]$*, если:*

1) $f(x)=2x^2-4x+3$, $[0;4]$; ***2)*** $f(x)=3x^2-x^3$, $[-1;3]$;

3) $f(x)=3x^3-9x^2+2$, $[-1;1]$; ***4)*** $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$, $[0;2]$;

5) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $[-2;2]$; ***6)*** $f(x)=tgx+ctg2x$, $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$;

7) $f(x)=x+cos^2x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; ***8)*** $f(x)=2x^2-ln\,x$, $[1;e]$;

9) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$, $[-3;3]$.

Блок 2.

Вариант 1.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x$ на отрезке $[-0,5;0,5]$.
2. Из квадратного листа жести со стороной 12 м надо изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объема. Найдите размеры бака и его объем.

Вариант 2.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1;1]$.
2. Какой из прямоугольников с периметром 2р имеет наибольшую площадь?

Вариант 3.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-0{,}5;0{,}7]$.
2. Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа. Чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

Вариант 4.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[0;3]$.
2. Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 м. И площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

Контрольные вопросы

1. Какую точку называют критической точкой функции?
2. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
3. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
4. Опишите планы нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, решения прикладных экстремальных задач и изучить образцы решенных примеров.

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование. - М, 2015

2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. - М, 2014

3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова. 2015

Практическая работа № 5

Тема: Вычисление интеграла методом подстановки

Цель: Отработка умений вычислять табличные интегралы, вычислять интегралы с помощью метода подстановки.

Оснащение рабочего места

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания;
2. Изучение теоретического материала по методической разработке;
3. Выполнение задания;
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория:

Основные свойства интеграла:

1. *Если функция f(x) имеет первообразную, то при $a \neq 0$ верно равенство $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$. (постоянный отличный от нуля множитель можно выносить за знак интеграла).*
2. *Если функции f(x) и g(x) имеют первообразные, то $\int(f(x) + g(x)dx) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. (интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций).*

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$, C – постоянная 2. $\int кdx = кx + C$ 3. $\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \neq -1$ 4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$ 5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$ 9. $\int e^x = e^x + C.$ 10. $\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ 11. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

Интегрирование методом замены переменно (методом подстановки)

В основе *метода подстановки* вычисления неопределенных интегралов лежит следующая формула, являющаяся простым следствием правила дифференцирования сложной функции:

$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$, (1) где $F(t)$ – какая – либо первообразная функции $f(t)$, $t = g(x)$.

Правую часть формулы (1) обычно записывают в виде $\int f(t)dt$ (2), где $t = g(x)$. Из формулы (1) следует, что если подынтегральное выражение имеет вид $f(g(x))g'(x)dx = f(g(x))dg(x)$ (3) или приводится к этому виду,

то интеграл $\int f(g(x))g'(x)dx$ можно свести к интегралу $\int f(t)dt$ (2) с помощью замены переменной, положив $t = g(x)$.

Пример 1. Найти $\int (2x + 1)^{10}dx$.

Т.к. $(2x + 1)^{10}\,dx = \frac{1}{2}(2x + 1)^{10}\,d(2x + 1)$, *то, положив* $t = 2x + 1$, *получим:*

$$\int(2x + 1)^{10}dx = \frac{1}{2}\int(2x + 1)^{10}\,d(2x + 1) = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{1}{22}t^{11} + C = \frac{1}{22}(2x + 1)^{11} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \sin x \cos^7 x dx$.

Положим $t = \cos x$, *тогда* $dt = -\sin x dx$. *Следовательно,* $\int \sin x \cos^7 x dx =$

$$= -\int t^7\,dt = -\frac{t^8}{8} + C = -\frac{\cos^8 x}{8} + C.$$

Ответ $$\int x(x+1)^{100}dx = \frac{(x+1)^{102}}{102} - \frac{(x+1)^{101}}{101} + C$$

Задания для самостоятельной работы:

Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

1. $\int (x + 5)^7dx$
2. $\int \sin^5 x \cos x\, dx$
3. $\int (3x - 1)^5dx$
4. $\int (2x + 7)^8dx$
5. $\int (7 + 3z)^5dz$
6. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$
7. $\int \cos^7 x \sin x\, dx$

Контрольные вопросы:

1) Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
2) Перечислите основные формулы интегрирования.
3) Какие методы интегрирования вы знаете?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015

2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014

3. Алгебра и начала анализа. Учебник 10-11 кл. под ред. Колмогорова. 2015

Практическая работа №6

Вычисление определенного интеграла по частям

Цель работы: закрепить умение вычислять определенный интеграл по частям.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка
2. Учебная литература
3. Справочники
4. Тетрадь для практических работ

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке
3. Выполнение заданий
4. Ответы на вопросы

Теоретический материал .

Рассмотрим функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, которые имеют непрерывные производные. Согласно свойствам дифференциалов, имеет место следующее равенство:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (udv + vdu) \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$$

Полученное равенство перепишем в виде:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Эта формула называется **формулой интегрирования по частям**. С ее помощью интеграл $\int udv$ можно свести к нахождению интеграла $\int vdu$, который может быть более простым.

Формулу интегрирования по частям целесообразно применять к интегралам следующего вида:

1) $\int P_n(x)e^{kx}dx$; $\int P_n(x)\sin(kx)dx$; $\int P_n(x)\cos(kx)dx$

Здесь $P_n(x)$ - многочлен степени n, k - некоторая константа. В данном случае в качестве функции u берется многочлен, а в качестве dv - оставшиеся сомножители. Для интегралов такого типа формула интегрирования по частям применяется n раз.

Пример. Вычислить $\int_0^1 x e^x \, dx$

Решение. Положим $u = x, \ dv = e^x dx$,

Тогда $du = dx = (x)' dx = dx$,

$v = \int e^x \, dx = e^x$

Следовательно, $\int_0^1 x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_0^2 (5x^3 + 6) \, dx$

2. $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x) \, dx$

3. $\int_0^{\pi/4} \frac{4 \, dx}{\cos^2 x}$

4. $\int_{-0,5}^{0,5} 3 \, (1 + z^2) \, dz$

5. $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

6. $\int_0^1 \frac{3 \, dx}{x + 3}$

7. $\int_4^5 (4 - x)^3 \, dx$

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(2x - \frac{\pi}{6}) \, dx$

9. $\int_0^{\pi} \cos 4x \, dx$

10. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

11. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$

12. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

13. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

14. $\int_0^1 x e^{-x}\,dx$

15. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4-x\sin x}{x}\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}$

Контрольные вопросы.

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2.

Литература:

1.Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015

2.Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014

3.Апанасов П.Т. Сборник задач по математике, 2015

Оформление отчета

1. Тема, цель
2. Решение задач.
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по работе.

Практическая работа № 7

Тема: ***Вычисление определенного интеграла методом прямоугольников и трапеций***

Цель: Научиться применять приближенные методы для вычисления интегралов

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка;
2. Учебная литература;
3. Тетрадь для практических работ.

Последовательность выполнения работы:

1. Получить индивидуальное задание;
2. Изучить теоретический материал по методической разработке;
3. Выполнить задания;
4. Ответить на вопросы.

Краткая теория.

Решение многих задач сводится к вычислению определенных интегралов, точное выражение которых сложно, требует длительных вычислений и не всегда оправдано практически.

В этом случае часто бывает вполне достаточно найти их приближенное значение.

1***. Метод прямоугольников***

Для нахождения приближенного значения интеграла $\int_a^в f(x)dx$, нужно:

1) Разделить отрезок интегрирования [a;b] на n равных частей точками
$x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$
2) Вычислить значение подынтегральной функции $y=f(x)$ в точках деления
$y_0=f(x)$
$y_1= f(x_1)$
………
$y_n= f(x_n)$
3) Применить одну из формул:

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})) \qquad (1)$$

Или

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)) \qquad (2)$$

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение. Пусть =10, т.е. разбиваем интервал интегрирования на 10 частей.

$h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$ Вычислим значение функции в точках разбиения:

$x_0 = 1$ $\quad y_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1$

$x_1 = 1{,}1$ $\quad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1{,}1} \approx 0{,}90909$

$x_2 = 1{,}2$ $\quad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1{,}2} \approx 0{,}83333$

$x_3 = 1{,}3$ $\quad y_3 = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{1{,}3} \approx 0{,}76923$

$x_4 = 1{,}4$ $\quad y_4 = \frac{1}{x_4} = \frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}71429$

$x_5 = 1{,}5$ $\quad y_5 = \frac{1}{x_5} = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66667$

$x_6 = 1{,}6$ $\quad y_0 = \frac{1}{x_6} = \frac{1}{1{,}6} \approx 0{,}625$

$x_7 = 1{,}7$ $\quad y_0 = \frac{1}{x_7} = \frac{1}{1{,}7} \approx 0{,}58824$

$x_8 = 1{,}8$ $\quad y_0 = \frac{1}{x_8} = \frac{1}{1{,}8} \approx 0{,}55556$

$x_9 = 1{,}9$ $\quad y_0 = \frac{1}{x_9} = \frac{1}{1{,}9} \approx 0{,}52632$

по формуле (1) получаем $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}1 \cdot 7{,}18773 = 0{,}718773$

2. Метод трапеций

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \qquad (3)$$

вычисления.

Пример: Найти приближенно $\int_0^4 x^2 d\,x$ *методом трапеций, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Вычислить погрешность приближения.*

Решение: Здесь n =10; тогда $\Delta x = (b-a)/n = 0{,}4$. Точками деления являются : $x_0 = 0;$ $x_1 = 0{,}4;$ $x_2 = 0{,}8;$ $x_3 = 1{,}2;$ $x_4 = 1{,}6;$ $x_5 = 2;$ $x_6 = 2{,}4;$ $x_7 = 2{,}8;$ $x_8 = 3{,}2;$ $x_9 = 3{,}6;$ $x_{10} = 4.$ Найдем значение функции в точках деления: $y_0 = 0;$ $y_1 = 0{,}16;$ $y_2 = 0{,}64;$ $y_3 = 1{,}44;$ $y_4 = 2{,}56;$ $y_5 = 4;$ $y_6 = 5{,}76;$ $y_7 = 7{,}84;$ $y_8 = 10{,}24;$ $y_9 = 12{,}96;$ $y_{10} = 16.$

Используя формулу (12), получим

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0{,}4\left(\frac{0+16}{2} + 0{,}16 + 0{,}64 + 1{,}44 + 2{,}56 + 4{,}0 + 5{,}76 + 7{,}84 + 10{,}24 + 12{,}96\right) = 21{,}44.$$

Точное значение интеграла определяем по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3} = 21{,}33.$$

Найдем относительную погрешность приближенного вычисления:

$$\delta = \frac{21{,}44 - 21{,}33}{21{,}33} \cdot 100\% \approx 0{,}5\%.$$

Метод парабол (метод Симпсона).

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 ... + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 .... + y_{n-1}))$$ n-четное число. (4)

Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислить интегралы, применяя метод прямоугольников и метод трапеций:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosxdx$

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

в) $\int_1^2 \sqrt{x}dx$

г) $\int_2^5 x^2 dx$

д) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

е) $\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx$

*Вычислить: а) $\int_1^4 x^2 dx$ б) $\int_1^2 \frac{dx}{2+x}$

Контрольные вопросы.

1. В каких случаях удобно применять приближенные методы интегрирования?
2. Какой метод дает более точный результат?

Литература:

1.Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015

2.Дадаян А.А. Сборник задач по математике.- М, 2015

Практическая работа № 8
Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными

Цель работы: научиться применять различные методы решения дифференциальных уравнений: с разделенными и разделяющимися переменными, второго порядка с постоянными коэффициентами

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка
2. Учебная литература
3. Справочники
4. Тетрадь для практических работ

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке
3. Выполнение заданий
4. Ответы на вопросы

Теоретический материал .

Определение 1: Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется **решением** дифференциального уравнения.

Определение 2. Решение, содержащее произвольную постоянную С, называется **общим решением** дифференциального уравнения.

Решение, в которое подставлено числовое значение С, называется **частным решением** дифференциального уравнения. Значение С вычисляется при подстановке начальных данных в общее решение.

Определение 3. Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется **порядком** дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными

Определение 4. Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – данные функции, называется **уравнением с разделенными переменными**.

Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Пример. $xdx + ydy = 0$, $2ydy = 3x^2dx$, $ds = (3t^2 - 2)dt$, $e^xdx = ydy$, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ *- уравнения с разделенными переменными.*

Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Пример. *Решить уравнение* $xdx + ydy = 0$. *Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим* $\int x\,dx + \int ydy = C$; $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$; $x^2 + y^2 = 2C$.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение 5. Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, где $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ – заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Пример. $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$, $1 + y - xy' = 0$ – *дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.*

Алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

Пример1. *Найти общее решение уравнения* $1 + y' + y + xy' = 0$.

Решение. 1. Заменим y' *на* $\frac{dy}{dx}$: $1 + \frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0$.

2. Умножим все члены равенства на dx: $dx + dy + ydx + xdy = 0$. *Сгруппируем все члены, содержащие dy и dx, и запишем полученные выражения в разных частях равенства:* $(1 + x)dy = -(1 + y)dx$.

3. Разделим обе части равенства на выражение $(1 + x)(1 + y)$: $\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}$.

4. Интегрируя обе части равенства, имеем $\int\frac{dy}{1+y} = -\int\frac{dx}{1+x}$;

$\ln|1+y| = -\ln|1+x| + \ln C$; $\ln|1+y| = \ln\left|\frac{C}{1+x}\right|$; $1+y = \frac{C}{1+x}$; $y = \frac{C}{1+x} - 1$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Решить уравнения: 1) $2ydy = 3x^2dx$ 2) $xdy + 2ydx = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (x^2 - 1)dx$, если $y = 4$ при $x = 1$.

Вариант 2

1. Решить уравнения: 1) $2y^2dy = 3xdx$ 2) $x^2dy = y^2dx$
2. Решить уравнение $ds = (3t^2 - 2)dt$, если $s = 0$ при $t = 1$.

Вариант 3

1. Решить уравнения: 1) $2ydy = (1 - 3x^2)dx$. 2) $y' = x$
2. Найти частное решение уравнения $2ydx = (1+x)dy$, если $y = 4$ при $x = 1$.

Вариант 4

1. Решить уравнения: 1) $(2-y)dy = xdx$ 2) $y' = x$
2. Найти частное решение уравнения $y' = 2+y$, если $y = 3$ при $x = 0$.

Решить уравнения(дополнительное задание)

1) $ydx - xdy = 0$
2) $(1+y)dx = (1-x)dy$

Литература:

1.Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2.Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2005
3.Апанасов П.Т. Сборник задач по математике, 2015

Контрольные вопросы:

1. Определение дифференциального уравнения, привести примеры.
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что такое общее и частное решения дифференциального уравнения?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделенными переменными?
5. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?
6. Определение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Какое уравнение является характеристическим для д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами?
8. Сформулируйте алгоритм решения д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Оформление отчета

1. Тема, цель
2. Решение задач.
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по работе.

Практическая работа 9
Тема: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель работы: научиться применять различные методы решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Оснащение рабочего места:

5. Настоящая методическая разработка
6. Учебная литература
7. Справочники
8. Тетрадь для практических работ

Последовательность выполнения работы:

5. Получение индивидуального задания
6. Изучение теоретического материала по методической разработке
7. Выполнение заданий
8. Ответы на вопросы

Теоретический материал .

Определение 1. **Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами** называется уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – постоянные величины.

Теорема 1: Если функция $y = y_1$ – решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то функция $y = ay_1$, где a – постоянный множитель, также является решением этого уравнения.

Теорема 2: Если функции $y = y_1$ и $y = y_2$ -решения уравнения $y'' +py' + qy = 0$, то функция $y = y_1 + y_2$ также является решением этого уравнения.

Определение 2. Два частных решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ называются линейно независимыми, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный множитель, т.е. $y_2 \neq ay_1$ ни при каких значениях a.

Теорема 3: Если $y = y_1$ и $y = y_2$ – линейно независимые частные решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то его общее решение имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Эйлер предложил искать частное решение в виде $y = e^{kx}$, где k – постоянная величина, которую нужно подобрать. При различных значениях k функции $y = e^{kx}$ будут линейно независимы.

Пример1. *Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.*

Подставим функцию $y = e^{kx}$ и ее производные $y' = k e^{kx}$ и $y'' = k^2 e^{kx}$ в данное уравнение:

$k^2 e^{kx}$ - 3 k e^{kx} + 2e^{kx} = 0. Выносим e^{kx} за скобки: $e^{kx}(k^2 - 3k + 2) = 0$. Т.к. $e^{kx} \neq 0$, $k^2 - 3k + 2 = 0$. Решаем полученное квадратное уравнение относительно k: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Значит частные решения данного уравнения таковы: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Общее решение уравнения имеет вид: $y = C_1e^x + C_2 e^{2x}$.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется **характеристическим** для данного дифференциального уравнения. Чтобы получить это уравнение, достаточно заменить y'', y', y соответственно на k^2, k, 1.

Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант	D > 0	D = 0	D < 0
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$	$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$	$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 3y' = 0$ б) $y'' - 5y' + 6y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y = -1$, $y' = 3$ при $x = 0$.

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + y' + y = 0$ б) $y'' + 6y' + 13y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Вариант 3

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' - 2y' + y = 0$ б) $y'' + 10y' - 11y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - 4\sqrt{2}\,y' + 6y = 0$, если $y = -3$, $y' = \sqrt{2}$ при $x = 0$.

Вариант 4

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' - y' - 12y = 0$ б) $y'' + 49y' = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 4y' + 4y = 0$, если $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$.

Вариант 5

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' - 22y' + 121y = 0$ б) $y'' - 4y' + 8y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y = -1$, $y' = 3$ при $x = 0$.

Вариант 6

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 3y' = 0$ б) $y'' - 5y' + 6y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y = 2$, $y' = 8$ при $x = 0$.

Вариант 7

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 24y' + 144 = 0$ б) $y'' - 2y' + 3y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - y = 0$, если $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Вариант 8

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 4y' + 4y = 0$ б) $y'' - 3y' + 2y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 2y' - 8y = 0$, если $y = 4$, $y' = -4$ при $x = 0$.

Вариант 9

1. Найти общее решение уравнения: а) $y'' + 12y' + 36y = 0$ б) $y'' - 8y' = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - 2y' + y = 0$, если $y = 4$, $y' = 2$ при $x = 0$.

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
3. Апанасов П.Т. Сборник задач по математике. 2015

Вопросы для получения зачета по работе:

9. Определение дифференциального уравнения, привести примеры.
10. Что называется порядком дифференциального уравнения?
11. Что такое общее и частное решения дифференциального уравнения?
12. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделенными переменными?

13. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?
14. Определение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
15. Какое уравнение является характеристическим для д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами?
16. Сформулируйте алгоритм решения д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Оформление отчета

Тема, цель

Решение задач.

Ответы на контрольные вопросы

Вывод по работе.

Практическая работа № 10

Тема: Выполнение операций над векторами, заданными своими координатами

Цель работы: закрепить умения выполнять действия над векторами.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ**.**

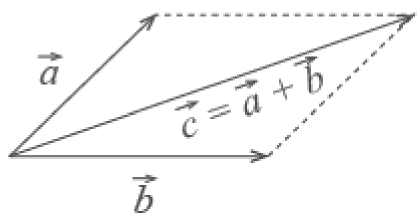
Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория

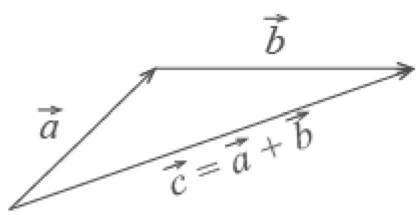
Для сложения векторов есть два способа:

1**. Правило параллелограмма**. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

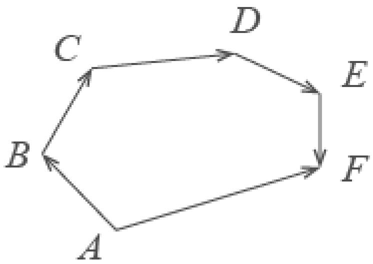


Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.

2. Второй способ сложения векторов — **правило треугольника**. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

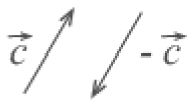
Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

При сложении векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b)$ получаем:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

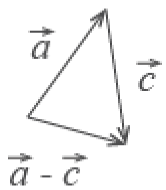
$$\vec{c}\,(x_a + x_b\,,\ y_a + y_b)$$

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.

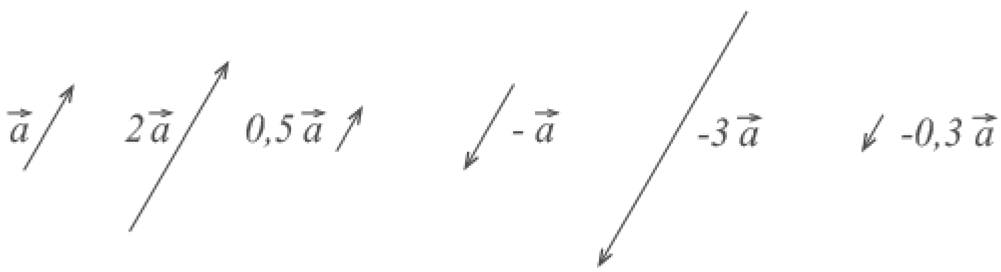


Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.

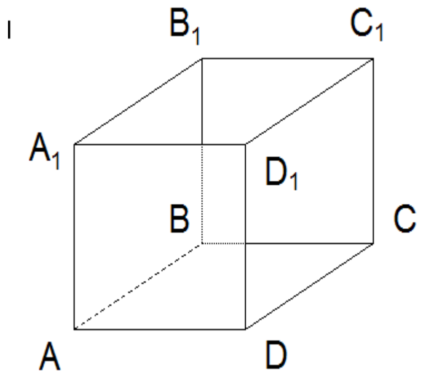
$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$$



При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



Для сложении *некомпланарных векторов* применяют ***правило параллелепипеда***



Задания для самостоятельной работы:

1 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$, обозначьте вектор СД и ВС соответственно через векторы и найдите их сумму.
2) Изобразите на рисунке векторы (по выбору) и найдите их сумму, разность.
3) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов

2 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$, обозначьте вектор СД и АД соответственно через векторы и найдите их сумму.
2) Изобразите на рисунке векторы (по выбору) и найдите их сумму, разность.
3) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов

Контрольные вопросы:

1. Какие действия можно производить над векторами?
2. Как сложить два и несколько векторов?
3. Как найти разность векторов?
4. Как найти произведение вектора на число?

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2005
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 1991
3. Атанасян Л.С. В.Ф.Бутузов Геометрия учебник для 10-11 класса

Практическая работа № 11

Тема: Решение задач на нахождение расстояния между двумя точками и координат точек, делящих отрезок в данном отношении

Цель: Научиться решать простейшие задачи в координатах.

Оснащение рабочего места:

1. Настоящая методическая разработка.
2. Учебная литература.
3. Тетрадь для практических работ**.**

Последовательность выполнения работы:

1. Получение индивидуального задания
2. Изучение теоретического материала по методической разработке.
3. Выполнение задания.
4. Ответы на вопросы.

Краткая теория:

1. Координаты середины отрезка.

Пусть даны точки $A(x_1;y_1;z_1),B(x_2y_2;z_2)$ и точка $C(x;y;z)$, являющаяся серединой отрезка *AB.* Тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

2. Вычисление длины вектора по его координатам.

$a\{x;y;z\}$ $\qquad |a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Расстояние между двумя точками.

Расстояние между двумя точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad + (z_2 - z_1)^2$$

Углы между векторами и прямыми.

Пусть даны два вектора

$a\{x_1;y_1;z_1\}$, $b\{x_2;y_2;z_2\}$.

Тогда косинус угла между данными векторами вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Задания для самостоятельной работы.

№1. Найти длину вектора АВ, если А(-1;0;2), В(1;-2;3)

№2.Определите вид треугольника АВС, если А(5;-5;-1),

В(5;-3;-1), С(4;-3;0).

№3.Даны точки М(-4;7;0) и К(0;-1;2). Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка МК.

№4. Даны точки А(0;1;2), В($\sqrt{2}$;1;2), С($\sqrt{2}$;2;1) и D(0;2;1).

Докажите, что ABCD квадрат.

№5. Вычислите угол между векторами a{2;-2;0} и b{3;0;-3}/

Контрольные вопросы:

1.Перечислите свойства координат вектора.

2. Чему равно скалярное произведение векторов

Литература:

1. Дадаян А.А. Математика. Профессиональное образование.- М, 2015
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика.- М, 2014
   Атанасян Л.С. В.Ф.Бутузов Геометрия учебник. 2015

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Намдакова Надежда Петровна
Домиева Наталья Федоровна

Сдано в производство_
Формат_60х84_1/16_
Усл. печ.л. ______уч.изд.л _________
Тираж__15___экз. Заказ__№_
Отпечатано БЛПК, Улан-Удэ, пр. Победы, 20
(место издания, адрес)